Lei 8,75

-30%

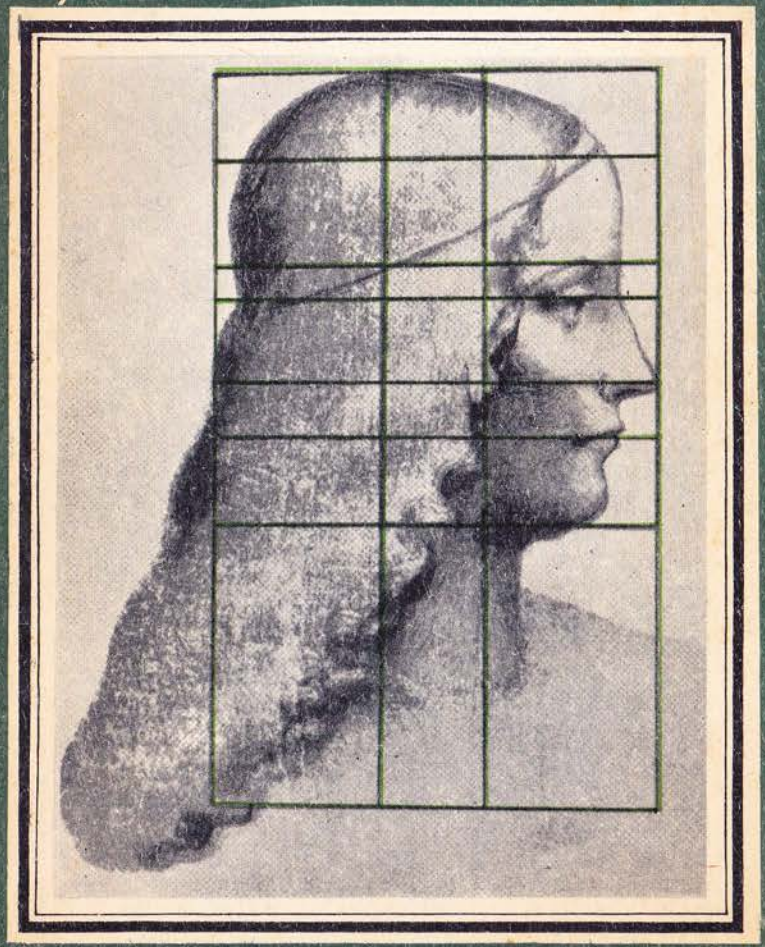
Povestiri cu proport...

4.99 lei

21040500101313

FLORICA T. CÂMPAN

POVESTIRI CU PROPORȚII ȘI SIMETRII



EDITURA ALBATROS

Coperta de GH. MARINESCU

reproduce portretul Isabellei d'Este
de Leonardo da Vinci,
analizat printr-un dreptunghi Φ și modulații bazate pe raportul Φ
(după M. Ghyka)

Ionescu Gh.

FLORICA T. CÂMPAN

POVESTIRI CU PROPORȚII ȘI SIMETRII

EDITURA ALBATROS
BUCUREȘTI • 1985

Lui Teodor,
în sufletul căruia
frumosul avea sălaș trainic.

ÎN LOC DE PREFAȚĂ

— Aș fi vrut, Bădie, să fi venit îndată după orele de Seminar, dar m-am mai luat cu niște treburi la Bibliotecă, de aceea am ajuns aici cu sufletul la gură — mi-a spus nepotul meu, Nucu, asistent la Facultatea de Matematică, atunci cînd a intrat pe ușă.

— Și, de ce, mă rog, aveai atîta grabă ? Ai descoperit vreo comoară ?

— Încă ce comoară ! Uită-te aici ! E închisă între aceste două coperți modeste.

— Coperta o cunosc. Este a unui număr din „Biblioteca Mathematica", revistă pe care am răsfoit-o adesea, fiindcă are articole foarte documentate privind istoria matematicilor. Păcat că după 1916 nu a mai apărut.

— E drept, toată colecția nu ocupă decît un singur raft din Biblioteca Seminarului Matematic. Din curiozitate, m-am uitat la data primului volum și am găsit anul 1884.

— Da, a trăit numai 32 de ani.

— Asta-i așa, numai că, după felul cum tărăgănezi matale discuția, am impresia că nu te prea sinchisești de noutatea ce ți-am adus-o !

— Te-nșeli, nepoate. Nu știi că omul, chiar cînd cade din copac, tot mai stă oleacă să se odihnească ? Dar eu ? Nu trebuia să pun mai întîi de cafea și apoi să ne dezmeticim ? Acum, cînd totul e gata, poftim, deschide revista și arată-mi minunea minunilor !

— La prima vedere e un articol ca oricare altul și are un titlu care nu sare în ochi : *Cartea găsirii coardelor în cerc* a lui Abu Raihan Muhamed ibn Ahmed al-Biruni, autor H. Suter [1].

— Fiind vorba de al-Biruni [2], desigur că l-am citit şi eu cîndva, dar nu-mi amintesc să mă fi cutremurat ca pe tine.

— Cred că eu nici nu aş fi dat peste el dacă nu ar fi avut oarecare legătură cu lucrarea pe care o pregătesc despre începuturile trigonometriei şi calcularea tabelelor. Or, citind acest articol, m-a intrigat faptul că al-Biruni, unul dintre cei mai de seamă matematicieni din lumea arabă, a preferat învechita noţiune de coardă în locul aceleia, atunci la modă, de sinus, ba chiar că a calculat şi o tabelă de coarde, cum a făcut-o cu opt secole mai înainte Ptolemeu în *Almagesta!*

— Ptolemeu n-avea de ales, fiindcă matematicienii greci nu au inventat sinusul. În locul lui, ei foloseau coarda, care-i dublul sinusului.

— Aşa da. Dar al-Biruni? El cunoştea perfect de bine sinusul şi chiar folosea în calculele sale tabelele de sinus, stabilite de alţi matematicieni dinaintea lui. Curios, mi-am zis eu, şi gîndul acesta m-a condus la comoara mea.

— Ei, acum chiar că m-ai făcut şi pe mine curios, aşa că aştept să ţi-o cunosc.

— Iat-o: al-Biruni a construit o tabelă de coarde numai fiindcă s-a îndrăgostit de cele două teoreme despre coarda frîntă, demonstrate pentru prima oară de Arhimede. Îţi citesc direct din articolul lui Suter, care a tradus din limba arabă lucrarea lui al-Biruni, numai prima teoremă: „Dacă într-un arc de cerc se înscrie o linie frîntă, formată din două segmente neegale şi din mijlocul arcului se duce o perpendiculară pe ea, această linie frîntă este înjumătăţită de perpendiculară". Să facem figura! Avem arcul de cerc AB (fig. 1), o linie frîntă oarecare, ACB, înscrisă în el şi TI, perpendiculara coborîtă din mijlocul arcului AB pe coarda mai lungă, AC. Teorema spune că $AI=IC+CB$.

— Da, teorema aceasta generalizează proprietatea stabilită de Euclid în *Elemente*, anume că perpendiculara TM dusă din mijlocul arcului AB pe coarda care-l subîntinde, o înjumătăţeşte, adică $AM=MB$. În acest caz, TM este şi rază a cercului O.

— Da, Bădie. Numai că această generalizare nu-i deloc evidentă, ba aş considera-o chiar surprinzătoare, fiindcă punctul C are o poziţie oarecare între A şi B, ceea ce face

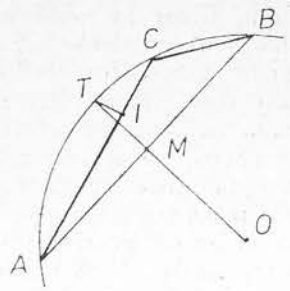


Fig. 1

ca lungimile celor două segmente, AC şi CB, să varieze nedefinit şi totuşi, perpendiculara dusă din mijlocul arcului pe segmentul mai mare, *impune o ordine*, înjumătăţind linia frîntă, oricare ar fi fost înfăţişarea ei!

— Ai dreptate. Teorema-i interesantă şi chiar atrăgătoare.

— Ba, e o teoremă *frumoasă*, fiindcă are proprietăţile caracteristice lucrurilor frumoase: unitate în diversitatea cazurilor posibile, ordine şi simetrie faţă de teorema coardei unice.

— Dacă ţii tu să-i zici frumoasă, sînt de acord să o numesc frumoasă.

— Ţin la asta, fiindcă numai aşa poţi admira, alături de mine, toată comoara mea! De-abia acum ai să-i cunoşti splendorile ei: află că acestei teoreme îi urmează 23 de demonstraţii diferite, începînd cu aceea a lui Arhimede; după ea urmează demonstraţia găsită de Abu Nasr, dascălul său, apoi a lui el-Habas şi ale altor matematicieni din ţările Islamului, apoi acelea stabilite de el însuşi. Iar explicaţia acestor obositoare şi îndelungate căutări — căci atunci nu existau cărţi tipărite, cu index la sfîrşit, ci numai cîteva rare copii manuscrise — îl las pe al-Biruni să ţi-o dea: „Tu ştii prea bine ce m-a îndemnat să cercetez atîtea demonstraţii ca să adeveresc o afirmaţie a grecilor antici cu privire la înjumătăţirea liniei frînte înscrise într-un cerc prin perpendiculara coborîtă pe ea din mijlocul arcului, cîtă pasiune am simţit pentru acest lucru şi cîtă plăcere am şi acum cînd îmi îndrept din nou privirea către el... Pentru dovedirea

acestei afirmații mi-au căzut în mînă un mare număr de demonstrații ale celor mai de seamă oameni de știință și eu m-am trudit să verific exactitatea lor și să le orînduiesc. Astfel, s-a îngrămădit atîta material în care pot să-mi arunc adesea privirea mînată de dragoste pentru știință și adorare pentru acești aleși învățați... și așa, în cele din urmă, le-am devenit tovarăș întru stabilirea acestei teoreme". Iată Bădie, comoara pe care am descoperit-o : aceste 23 de demonstrații pe care le prezintă al-Biruni pentru o teoremă frumoasă ! Căutîndu-le și transcriindu-le, el nu a urmărit nici un scop practic, nici unul teoretic, ele sînt cu totul gratuite așa cum sînt și celelalte 9 demonstrații care le-a găsit pentru cea de a doua teoremă. M-a înduioșat nespus această mărturisire de acum o mie de ani, fiindcă am avut impresia că mi-a făcut-o mie, ca să mă încredințeze că am dreptate să cred că sînt unele teoreme care te pot încînta tot atît de tare ca și „Balada" lui Ciprian Porumbescu, „Cînd însuși glasul gîndurilor tace" a lui Eminescu, „Creanga de aur" a lui Sadoveanu, „Pasărea măiastră" a lui Brîncuși, „Beduinul" lui Pallady și alte opere de artă în fața cărora noi doi ne-am închinat de atîtea ori cu smerenie. În cazul acesta, nu a fost decît un simplu arc de cerc și nimic mai mult, dar acest arc a făcut să vibreze ceva adînc din sufletul marelui al-Biruni, deși el nu era un matematician de rînd, ba era și fizician și astronom și medic și geograf și lingvist cum o dovedește renumita lui carte *Cronica Indiei,* ca să nu mai adaug că era și astrolog, fiindcă fără asta nu se putea atunci... I-am înșirat toate titlurile numai ca să subliniez că avea de unde să-și aleagă modele de admirație ca să nu fie constrîns să cadă în extaz în fața unui simplu arc de cerc. Și totuși, secretul ascuns în acest arc de cerc... Venind încoace, Bădie, m-am gîndit că, spunîndu-ți acestea, n-are să te rabde inima să nu-mi reciți poezia lui Paul Valéry, vrăjit și el tot de niște curbe !

— Bine, am să ți-o spun, dar după ce mai faci o cafea, nu scapi nesăpunit !

„O, courbes, méandres,
Secrets du menteur,
Est-il art plus tendre
Que cette lenteur ?
Je sais où je vais.
Je t'y veux conduire.
Mon dessein mauvais
N'est pas de te nuire".

— Mulțumesc, Bădie. O încheiere mai frumoasă a celor discutate nici nu s-ar fi putut, dacă n-ar exista amenințarea *săpunelii.* Nu-mi dau seama cu ce te-am putut supăra ? Poate fiindcă am acuzat culegerea demonstrațiilor lui al-Biruni de *gratuitate ?* Dar asta-i unul dintre apanajele frumosului. Nu mărturisea oare Flaubert, în una dintre scrisorile lui, pe care mi-ai citit-o chiar mata, că ar dori să scrie o carte *despre nimic :* „o carte fără legături exterioare, care s-ar ține ea însăși prin forța internă a stilului său, așa cum se menține pămîntul, fără a fi sprijinit ?". Altă vină nu-mi văd, iar în privința *gratuității,* aș mai adăuga că am găsit, nu de mult, informația că un matematician din secolul trecut afirma că preferă să se ocupe cu pătratele magice fiindcă este sigur că acestea nu vor folosi niciodată la nimic !

— Numai că bietul om s-a înșelat, așa cum te înșeli și tu. Nu trebuie să-ți spun eu că pătratele magice au găsit aplicații la războaiele de țesut și chiar în alte domenii. Dar cu tine, altu-i baiu. Discuția noastră de azi în loc să mă încălzească, aș putea spune că m-a cam răcit. Ascultîndu-te mă întrebam : Oare de ce tocmai mărturisirea lui al-Biruni l-a înflăcărat pe băiatul acesta atît încît să vie cu sufletul la gură ca să-mi descopere mie că matematica e frumoasă ? În naivitatea mea, eu credeam că aceasta a fost pricina care te-a făcut să alegi matematica drept obiect de studiu ! Și, oare, de cîte ori zăboveam, noi doi, cîte o după amiază întreagă asupra unui flecuștet de care nu ne mai înduram să ne despărțim, nu o făceam fiindcă ne încînta ? Sau cînd îmi aduceai la cunoștință că la cele 9 puncte de pe cercul lui Euler ai mai găsit adăugate altele și altele, aceste puncte nu erau și ele gratuități închinate frumuseții ? Și apoi, cum de te-au scos din minte 23 de demonstrații și nu ai reacționat, cel puțin la fel, cînd a fost vorba de sutele de demonstrații, tot așa de gratuite, ale teoremei lui Pitagora ?

— Asta-i pricina, Bădie ? Cu alte cuvinte, mata ești gelos pe al-Biruni ? Atunci să știi că ai și de ce ! Fiindcă articolul lui Suter despre al-Biruni mi-a răvășit cu adevărat sufletul. Al-Biruni mi-a vorbit cu căldură, i-am simțit pasiunea cu care căuta demonstrațiile, cum se bucura și cu cîtă înfrigurare le controla, cu cîtă satisfacție le transcria cînd constata că nu găsește nici o greșeală de raționament. Al-Biruni s-a dezlănțuit în fața mea, pe cînd mata te-ai stăpî-

nit ! Pînă acum eu nu am crezut că eşti şi mata un sentimental, eu te admiram că eşti un om care-ţi „ţii inima-n frîu" şi mă străduiam să-mi impun şi eu această stăpînire. Alături de mata, am considerat cu respect şi admiraţie adevărurile matematice, dar *n-am zburdat* niciodată ! Nu-ţi aduci aminte că am privit ca o curiozitate, ca o întrecere între matematicieni, sutele de demonstraţii ale teoremei lui Pitagora şi nu ca un omagiu adus frumuseţii ei ? Noi doi am găsit că teorema reciprocităţii resturilor pătratice este foarte interesantă şi că, de aceea, chiar Gauss însuşi, în decursul anilor, i-a stabilit 6 demonstraţii diferite, dar n-am stăruit asupra faptului că Gauss a considerat-o *foarte frumoasă* şi că, de aceea, a şi alintat-o, cînd cu numele de *theorema aureum*, cînd cu acela de *bijuterie a matematicii*. Aşa că, dragă Bădie, săpuneala care intenţionai să mi-o dai mie s-a întors ca un bumerang înspre mata ! *De aceea*, va trebui să ispăşeşti !

— Dacă mă gîndesc bine, poate că, pe undeva, ai dreptate ! Îmi vine în minte un fragment dintr-un articol al lui Poincaré pe care nu ţi l-am citit, fiindcă atunci mi s-a părut prea sentimental. Citindu-ţi-l acum, ispăşesc ?

— Da, dar nu complet. Spune-mi ce volum să-ţi aduc ?

— *Ştiinţă şi metodă*. E vorba de articolul „Invenţia matematică", unde spune : „Pare de mirare că se invocă emotivitatea alături de demonstraţiile matematice care, se pare, nu pot interesa decît inteligenţa. Dar, ar însemna să se uite sentimentul frumuseţii matematice, al armoniei numerelor şi formelor, al eleganţei geometriei. E vorba de un adevărat sentiment estetic pe care toţi adevăraţii matematicieni îl cunosc. Şi tocmai aici se află emotivitatea. Or, care sînt fiinţele matematice cărora noi le atribuim acest caracter de frumuseţe şi eleganţă şi care sînt în stare să trezească în noi o anume emoţie estetică ? Sînt acelea în care elementele sînt dispuse în armonie, aşa fel ca spiritul să le cuprindă laolaltă, fără nici o sforţare, pătrunzînd totodată şi amănuntele. Această armonie este în acelaşi timp o satisfacţie pentru nevoile noastre estetice şi un ajutor pentru spiritul pe care-l susţine şi conduce. Şi, în acelaşi timp, punînd sub ochii noştri un tot bine ordonat, ea ne face să presimţim o lege matematică... Astfel, această sensibilitate estetică specială este aceea care joacă rolul acelui ciur delicat despre care am

vorbit mai sus şi asta ne face să înţelegem de ce acela care nu-l are, nu va fi niciodată un adevărat inventator" [3].

— Eşti pe calea cea bună, Bădie şi mă întreb, ce-ar fi să-ţi ispăşeşti mata toate păcatele, cele multe şi grele, admiţînd ca subiectul discuţiilor noastre viitoare să se axeze pe tema *Matematica şi frumosul ?* Să căutăm cîteva lucruri frumoase din matematică, şi asta începînd chiar de la primele licăriri ale acestor două noţiuni în mintea omului, să le recunoaştem ca atare şi să le admirăm pentru frumuseţea lor !

— Eu zic că dacă-i bal, bal să fie ! Să atacăm încaltea şi problema inversă : *Frumosul şi matematica*. Fiindcă, dacă-i vorba ca să o luăm de la începutul începutului, cred că matematica s-a dezvoltat mînă-n mînă cu artele frumoase, fără a se putea preciza care a fost mai întîi. Poate că, impresionat de linia dreaptă a fulgerului, de înfăţişarea tulpinilor de floare sau copac, de conturul orizontului, omul a încercat să le reproducă imaginea trăgîndu-le cu degetul pe nisip sau scrijelindu-le cu o piatră ascuţită pe pereţii peşterilor. Iar după ce le-a desenat, i-au plăcut şi mai mult şi le-a socotit frumoase. Pot să-ţi arăt două desene de acum vreo 40 000 de ani în urmă, care au fost găsite pe un perete al uneia dintre peşterile preistorice descoperite în veacul al XIX-lea în Franţa [4] (fig. 2). După cum vezi, în ambele apar nişte

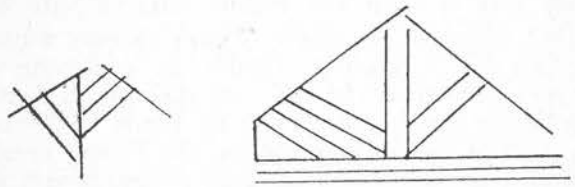


Fig. 2

combinaţii de linii drepte. În alte peşteri s-au descoperit chiar figuri geometrice : ovale, triunghiuri şi patrulatere. Iată ce scrie şi autorul cărţii în care am găsit aceste desene : „un anumit aspect armonios, agreabil vederii, a putut fi atins şi căutat conştient, pornind de la procesele tehnice ce produceau efecte ritmate : ritmul mîinii care lucrează, repetiţia ornamentală a elementelor, inciziile transversale sau longitudinale, paralele sau întretăiate, în serii simple sau multiple,

unelte din os sau lemn. Toate aceste elemente, o dată remarcate şi reproduse pentru plăcerea procurată autorului şi semenilor săi, constituie *o artă decorativă de origine tehnică*, artă care în mod firesc se dezvoltă din ce în ce, pînă în zilele noastre". [4, p. 73] Însă, ca să se atingă acest stadiu, observă autorul : „aproape o jumătate de milion de ani de experienţă în piatră i-au fost necesari omului pentru a ajunge în momentul cînd el însuşi a început să dea formă convenabilă pietrei, adică să o şlefuiască pentru a obţine un instrument de tăiat, zgîriat sau de străpuns". [4, p. 76]

— Şi poate că atunci cînd aceste linii, zgîriate la început în joacă şi apoi din plăcerea de a le executa, s-au prefăcut în figuri regulate, în care apăreau anumite elemente de ordine ori simetrie, să fi licărit în mintea omului şi primele elemente de aritmetică şi geometrie. Căci tocmai prin acest impuls interior către desen şi totodată către gîndire şi raţionament se deosebeşte omul de mulţimea animalelor, numai aptitudinea lui de a analiza şi generaliza i-a deschis calea progresului.

— Tare mă tem eu, dragă Nucule, că panta aceasta a presupunerilor şi a consideraţiilor filosofice să nu ne ademenească spre un teren plin de capcane şi să ne îndepărteze de calea ce ne-am propus-o. Pe noi ne interesează în primul rînd *frumosul* şi pe el vrem să-l descoperim *în* şi *prin* matematică. Matematica, să presupunem că ştim ce-i, dar frumosul, de care ai făcut mai înainte atîta caz, ştii ce este ?

— De ! Instinctiv aş spune că ştiu ce este, atunci cînd sînt în faţa lui îl recunosc, fiindcă mă copleşeşte, dar de definit, mi-e cam greu. Hai să-i caut definiţia în *Dicţionarul de filosofie*, nu de alta, dar ca să nu rămîn la cheremul zicătoarei : „Nu-i frumos ce-i frumos, ci-i frumos ce-mi place mie". Iată că am şi găsit-o : „Frumos — categorie a esteticii, considerată fundamentală în doctrinele estetice mai vechi, astăzi înlocuită însă în această poziţie de estetic. Frumosul este reprezentarea în conştiinţa omului a proprietăţilor obiectelor apreciate ca armonioase din punct de vedere estetic". [5] Mie, definiţia asta nu-mi spune nimic alta decît că frumosul este estetic ! Cu alte cuvinte, m-am lămurit buştean !

— Prea mai eşti şi tu pretenţios ! Dar fiindcă dicţionarul nu epuizează toate izvoarele în care, de peste două mii de ani se frămîntă problema frumosului, aş zice să mai căutăm şi prin unele cărţi.

— În acest caz ştiu, de mai înainte, că vom începe cu Platon !

— Şi de ce nu ? În şcoala lui Pitagora exista un cult al frumosului, dar despre aceasta, ca şi despre toate descoperirile celelalte, maestrul nu a scris nimic. Au făcut-o însă urmaşii, printre care cel mai reprezentativ a fost, desigur, Platon. El a discutat despre frumos în multe dintre dialogurile sale şi a recunoscut rolul important pe care-l joacă matematica în exprimarea artistică. De pildă, în *Philebus*, spunea : „Dacă aş scoate din artă aritmetica, măsurătorile şi cîntăririle, ceea ce ar rămînea, n-ar fi prea mult". Sau, făcînd aluzie la cerc şi la notele muzicale : „Măsura şi proporţia întrec întotdeauna în frumuseţe şi excelenţă". Dar a aprofundat această problemă mai cu seamă în *Hippias maior*, care poartă ca subtitlu „Despre frumos". Îl am la îndemînă şi, dacă vrei, l-am putea răsfoi.

— Desigur. După cum văd, Socrate îi pune „frumosului şi atotştiutorului Hippias" chiar întrebarea noastră : „Ce este frumosul ?" Şi, cînd vede că Hippias, care începuse prin a se lăuda că pentru el a răspunde la o asemenea întrebare este o nimica toată, îi prezintă un lucru frumos, nemulţumit, Socrate reia întrebarea, precizînd-o : „Ce este frumosul în sine, acela care adăugat oricărui lucru îl face să devină frumos ?"

— Şi din nou, semeţul Hippias dă din colţ în colţ, nevoit să suporte ironiile lui Socrate, atunci cînd acesta îi arată că el confundă frumosul fie cu expresia individuală, fie cu materia generală, fie cu potrivirea materiei, fie cu potrivirea umană, cu potrivirea în sine, cu potrivirea generală şi utilă sau cu desfătarea dezinteresată.

— Îmi place foarte mult replica lui Socrate, mustind de batjocură : „Mă tem deci că lucrurile nu stau aşa cum credeam noi, căci definiţia de adineauri, după care frumosul este tot una cu avantajosul, utilul şi capacitatea de a face ceva bun, nu este, cum părea, dintre cele mai reuşite ; dimpotrivă... ea este şi mai ridicolă decît cele de la început, cînd eram încredinţaţi că frumosul este fata frumoasă şi toate celelalte pomenite pînă acum". Iar sfîrşitul, după ce Socrate rezumă întreaga străduinţă a lui Hippias prin întrebarea : „Şi dacă nu ştii ce-i frumos ?", simţi concluzia căzîndu-ţi ca un bolovan peste cap : „sînt tare grele cele frumoase". [6]. Ce sfat îmi dai, Bădie, ca să mă dezmeticesc ?

— Nu-i decît unul, să mergem mai departe. Am putea să ne oprim şi la Aristotel, deşi nici el nu ne spune direct şi răspicat ce este frumosul. Dar în *Metafizică* el consideră că studiul matematicii este indicat ca o călăuză în drumul spre frumos : „Greşesc acei care afirmă că ştiinţa matematicii nu spune nimic despre frumuseţe şi bunătate... Principalele elemente ale frumuseţii sînt ordinea, simetria, o limitare precisă şi acestea sînt proprietăţile asupra cărora matematica atrage atenţia". În *Comentariile asupra lui Euclid*, scrise de Proclus prin secolul al V-lea, este amintită această părere a lui Aristotel *despre frumuseţea matematicii* şi calităţile atribuite ei sînt analizate astfel : „*ordinea* se constată în geneza secundarului şi multiplului din ceea ce este primordial şi simplu ; căci întotdeauna următorul depinde de antecedent şi unul are valoarea de principiu, celălalt are valoarea de consecinţă din cele mai înalte supoziţii, *simetria* se observă în concordanţa reciprocă a demonstraţiilor... în fine, *determinarea* se observă în ideile invariabile şi durabile, căci cunoştinţele sale nu sînt în continuă schimbare cum se întîmplă cu simplele opinii şi cu percepţiile simţurilor, ci ea expune totdeauna aceleaşi propoziţii şi este determinată prin forme de existenţă intelectuală. Dacă frumuseţea se sprijină în special pe aceste puncte, iar matematica îşi capătă profilul său tocmai prin aceasta, atunci este evident că şi matematicii i se poate atribui frumosul" [7]

— Ceea ce mi-ai citit mata acum e foarte frumos şi parcă mi-a mai adus inima la loc. Simt că parcă ne apropiem de ceea ce căutăm.

— Ei, atunci, hai să te mai depărtez, nu de alta, dar ca să ai perspectivă ! Uite am eu o cărticică cu numele : *O istorie a teoriilor despre artă*, şi am să-ţi citesc de acolo cîteva gînduri care l-au frămîntat pe Albrecht Dürer, fiindcă şi el a căutat cu disperare răspuns la întrebarea ce ne-am pus-o noi şi fiindcă *Melancolia* lui ai privit-o adesea curios şi nelămurit. Au trecut deci 18 veacuri de cînd Aristotel a crezut că a dat îndrumări precise celor ce pornesc în căutarea frumosului. Optsprezece veacuri, adică 1 800 de ani, destul timp ca să se găsească ceva, de este de găsit. Însă, într-o ciornă la tratatul său despre pictură Albrecht Dürer scria aşa : „Ce este frumosul ? asta nu ştiu". Iar mai departe : „Aş dori totuşi să înţeleg aici frumuseţea în felul următor :

ceea ce în diferitele epoci ale umanităţii a fost considerat drept frumos de către majoritatea oamenilor, aceasta este ceea ce trebuie să ne străduim să facem... Nenumărate sînt diferenţele şi cauzele frumosului... Căci ceea ce socotim frumos în unele lucruri nu mai apare la fel în altele. Din două lucruri diferite, amîndouă frumoase, nu este uşor să hotărăşti care este mai frumos ?" [8]

— Da, Bădie, mi-ai făcut-o ! Dar află mata că încurcătura pictorului mi-a dat soluţia pe care el nu a putut-o afla atunci, fiindcă nu exista ! Trebuie să vedem ce spun şi tratatele de estetică, vorba dicţionarului ! Ştiu că în biblioteca matale se află de vînzare şi asemenea marfă, nu ?

— Ba da, du-te şi caută în raftul din stînga, sus şi adă aici ce-ţi place.

— Chiar toate, nu le-am adus. Dar pentru un gust, cred că ne-ajung. Aş vrea să vedem ce scrie mai întîi Tudor Vianu [9].

— Şi eu tot cu *Estetica* lui Tudor Vianu aş fi început. Uite, în caracterizarea generală a valorii estetice, se referă şi la activitatea ştiinţifică : „Un element artistic recunoaştem şi în unele opere ale ştiinţei, dacă luăm seama în felul în care se compun, se unifică şi se gradează raţionamentele care le constituie" [9, p. 49] Dar, parcă şi mai clar dezvoltă el această temă mai departe, cînd se opreşte asupra *atitudinii estetice :* „Ştiinţa înaintează de la fapt la fapt, de la observaţie la observaţie, de la generalizare la generalizare. Procedeul ei este prin excelenţă succesiv şi meditativ. Intuiţia, în care se recompune însă o totalitate bine închegată, este un act care aminteşte de aproape contemplaţia artistică. Fără îndoială, ştiinţa cercetează şi arta contemplă. Contemplaţia nu se opune însă cercetării, ci, dimpotrivă, atunci cînd o ajută să se degajeze de sub injoncţiunile moralei sau cînd îi oferă cadrul în care să se poată înscrie rezultatele ei. Spiritul artistic se poate deci uni cu cel ştiinţific. Ba chiar numai unirea lor oferă acestuia din urmă întreaga lui rodnicie". [9, p. 62]

— Am fost bine inspirat, alegînd acest volum. Cred că ai să mi-l dai acasă ca să-l buchisesc în voie.

— Cum să nu, eu am de gînd să-ţi citesc, în continuare, numai ceva din capitolul intitulat : „Atitudinea estetică în receptarea Artei", unde, pentru noi, opera de artă va fi echi-

valentă cu o problemă frumoasă de matematică. Eşti de acord ?

— Calule, mănînci ovăz ?

— Atunci ascultă : „Există unele obiecte anume întocmite pentru a solicita răsfrîngerea lor în raport cu valoarea estetică. Aceste obiecte sînt operele de artă. Faptul că însăşi o operă de artă poate fi resimţită ca un bun economic de vînzătorul ei sau ca unul teoretic de istoricul care nu vede în ea decît un document al civilizaţiei timpului ne permite a spune că operele artei nu devin realităţi estetice decît prin valorificarea lor dintr-un unghi anumit. Această valorificare nu este însă o acţiune automată a spiritului. În acţiunea de valorificare estetică intră un element volitiv, hotărîrea de a mă comporta estetic, atitudinea estetică... Întocmai ca orice manifestare volitivă a spiritului, atitudinea estetică implică unele inhibiţii şi unele impulsuri, pe care urmează să le examinăm pe rînd.

Prima inhibiţie... priveşte interesul practic faţă de realitate. Nu este cu putinţă de a mă apropia estetic de un obiect dacă în prealabil nu elimin toate interesele practice pe care mi le poate trezi... atitudinea estetică reclamă o supraveghere, o putere de a controla şi alege, funcţia continuă a unei cenzuri pe care spiritul nu o regăseşte întotdeauna cu uşurinţă. Altă inhibiţie implicată de atitudinea estetică este aceea în legătură cu percepţia intelectuală a obiectelor... Dincolo de ceea ce simţurile ne înfăţişează, spiritul nostru adaugă intuiţiile lui intelectuale... Numai că în clipa şi în măsura în care reacţionează intelectual, amatorul sau criticul de artă se află exclus de la atitudinea estetică... Prin toate aceste inhibiţii şi eliminări, atitudinea estetică se caracterizează ca o stare de pace lăuntrică, de supremă destindere morală şi intelectuală. Cine nu se pricepe să facă linişte în sine nu poate auzi glasul artei. Tumultul interior le acoperă. Pacea sufletului le scoate în relief. Omul care se pregăteşte pentru întîlnirile artei trebuie să opereze în sine acel *catarsis*, acea purgare a pasiunilor care nu este numai un efect al artei, dar şi o condiţie a ei... Fiinţa orientată estetic nu vrea să stăpînească realitatea, nici s-o modifice sau s-o exploateze, nici s-o înţeleagă, ci numai să se bucure de simpla ei existenţă, în expresia ei sensibilă". [9, p. 301—304]

— Rîndurile care mi le-ai citit sună ca un imn, parcă n-aş mai putea asculta nimic după ele !

— De altfel e şi destul de tîrziu.

— Acesta nu-i un argument. Nu-i prima noastră noapte albă şi asemenea escapade nu ne sînt străine ! Iar mîine nu am nici o oră de Seminar !

— Cu alte cuvinte, după o cafea ai vrea să atacăm şi celelalte volume ce stau pe masă ?

— Da, după o cafea, drept să-ţi spun că parcă m-ar tenta să văd dacă mai pot găsi ceva care să mă mulţumească şi să mă încînte atîta cît acele cîteva frînturi strălucitoare din *Estetica* lui Vianu.

— Eşti cam exclusivist şi totodată cam refractar atitudinii estetice preconizată de idolul tău momentan ! El cere, mi se pare mie, *purgarea pasiunilor*, or tu vrei să-i judeci pe ceilalţi prin prisma plăcerii care ţi-a lăsat-o o anumită lectură. Dacă-i aşa, poate e mai bine să renunţăm !

— Iar ai dreptate, Bădie, toarnă nişte apă rece peste mine că am luat foc !

— Nu-i nevoie, cafeaua fierbinte şi, totodată, surpriza care am de gînd să ţi-o fac vor aduce bucuria care însoţeşte frumosul.

— O surpriză ? Care ?

— Uită-te bine şi vezi-o, căci abia azi a apărut în librărie ! Am pus-o anume în sertar ca să nu dai dintr-odată cu ochii de ea.

— Dar asta-i cartea lui Ştefan Odobleja : *Psihologia consonantistă !* Ştiam că trebuie să apară, dar n-am văzut-o ! Şi ce spune primul cibernetician al lumii şi al nostru despre frumos ? Sau nu atinge această problemă ?

— Ba da, desigur că numai în treacăt, dar de atins o atinge. El consideră că : „frumosul este plăcerea exerciţiului optim (normalizat, compensator, echilibrat) al psihicului. Plăcerea unui exerciţiu complementar... Plăcerea activităţii psihice în sine şi spontane, fără mobil extrinsec, plăcerea fără cauze şi scopuri aparente". [10, p. 522]

— Prin ultima caracterizare se apropie de Vianu : — frumosul, o plăcere fără cauze şi scopuri aparente — bine spus ! Atunci, Bădie, mă rog frumos, citeşte şi vreun rînduleţ, două, din *Estetica* lui Mihai Ralea, că doar n-am adus-o degeaba !

— Chiar numai atîta acum, fiindcă la această carte ne vom mai întoarce. Uite, îţi citesc din capitolul intitulat „Frumosul", cu condiţia ca să nu mă întrerupi. Ţi-o spun, fiindcă ştiu că-ţi va fi greu să te abţii de la comentarii. „În concepţiile estetice actuale este încă o mare confuzie în ceea ce priveşte categoria frumosului... Cîteodată frumosul înlocuieşte esteticul, adică este considerat drept fenomenul care formează baza speculaţiei estetice... Primul element al noţiunii de frumos este impresia de totalitate, de organism. Ori de cîte ori părţile operei de artă satisfac o perfectă solidaritate estetică, fiecare integrînd armonios ansamblul, obţinem frumosul. Apoi, frumosul produce o plăcere directă, simplă şi imediată. Această plăcere este desinteresată şi se referă la formă... Frumuseţea este legată — cu oarecare excepţii — de creaţia clasică, de echilibrul sufletesc, calm, de armonie, justiţie, proporţie". [11, p. 238]

La acestea aş mai adăuga şi următoarea observaţie, făcută în alt loc : „Estetica are adevăruri care sînt permanente şi acestea sînt raporturile, armonia şi proporţiile".

— Interesant de tot, Bădie ! E adevărat că-mi venea să te întrerup, mai ales la început, cînd l-am simţit pe Socrate mărturisindu-şi iar „of-ul". Dar după aceea, ascultîndu-te atent, am văzut că definiţia din *Dicţionarul de filosofie* nu era chiar aşa de abracadabrantă, vina era a mea că nu am fost destul de pregătit ca să o înţeleg.

Cred că ar trebui să mă mai uit odată în *Dicţionar,* ca să citesc ce se spune şi la cuvîntul : „estetic". Am găsit [5, p. 244] : „Estetic, categorie a *esteticii,* de cea mai largă generalitate, căreia i se subsumează obiecte şi procese din natură şi societate, ca şi lucrări făurite de om, şi care întrunesc condiţiile unei structurări armonioase şi expresive... Esteticul a fost multă vreme sinonim cu *frumosul* (considerat a fi categoria estetică de cea mai largă generalitate), dar de îndată ce trăsăturile frumosului au început să fie ale unei categorii particulare (ca şi urîtul, tragicul...) esteticul tinde să ia locul pe care-l ocupa în doctrinele mai vechi referitoare la artă". Da, abia acum am înţeles de ce frumosul este un caz particular al esteticului, şi e bine că putem preciza, că *noi ne vom limita numai la frumos.* Noi ne vom strădui în discuţiile noastre viitoare să admirăm cîteva din părţile *cu adevărat frumoase* din matematică, adică aşa cum am spus mai

înainte : *matematica şi frumosul* şi, totodată, ori de cîte ori ni se va ivi ocazia, să discutăm şi despre contribuţia matematicii la evaluarea frumosului, cu alte cuvinte : *frumosul şi matematica.*

Să ştii că-mi pare foarte bine că mi-ai citit această pagină scrisă de Mihai Ralea. Mie, scriitorul îmi era cunoscut numai din „Explicarea omului" şi din alte cîteva eseuri. În legătură cu frumosul am mai reţinut, nu mai ştiu anume din care articol de-al lui, şi fraza aceasta : „Pentru mulţi dintre noi, ceva frumos înseamnă ceva plăcut. Frumosul, în mod comun, se prezintă ca o categorie a voluptăţii : voluptatea armoniei şi a unei ordini superioare". Ba, îmi mai aduc aminte şi de alta, cu care n-am fost de acord : „Cu multă dreptate spune Paul Valéry că sentimentalismul e frate bun cu pornografia. Căderea pe panta duioşiei e o vină tot aşa de mare pentru artist ca şi cultivarea în artă a libidinozităţii". Tot în scrierile lui Mihai Ralea am citit ceva şi în legătură cu Benedetto Croce. Mi se pare că nu era de acord cu el, fiindcă a identificat arta cu expresivitatea ! De aceea, chiar, printre cărţile ce le-am dat jos din raftul din stînga se află şi *Estetica* cu pricina. Nu ai mai vrea să o deschizi şi pe ea, măcar pentru o singură pagină ca să mă lămureşti ce-i cu *expresivitatea.*

— Cred că va trebui să răsfoim mai multe pagini ca să poţi desprinde ceea ce vrei. Trebuie să ştii că Benedetto Croce consideră că *frumosul nu are existenţă fizică,* iar frumosul natural este un simplu stimulent al reproducerii estetice, adică a expresiilor. Dar, ca să-ţi fie mai clar, să pornim de la părerile lui despre cunoaştere. „Cunoaşterea are două forme: *intuitivă* şi *logică ;* cunoaşterea prin *imaginaţie* sau prin *intelect ;* cunoaştere a *individualului* sau a *universalului ;* a lucrurilor considerate fiecare în parte sau cunoaştere a *relaţiilor* lor. Cunoaşterea prin intelect are o ştiinţă a ei, — logica — ... Cunoaşterea intuitivă este cunoaştere expresivă, independentă şi autonomă faţă de cunoaşterea prin intelect... A intui înseamnă a exprima şi nimic altceva (nimic mai mult, dar şi nimic mai puţin) decît a exprima". [12, p. 75—85] Mai departe, relativ la „Artă şi ştiinţă" scrie : „Manifestările cele mai înalte, vîrfurile care strălucesc de la distanţă ale cunoaşterii intuitive şi ale cunoaşterii intelectuale se numesc, după cum ştim, artă şi ştiinţă. Arta şi ştiinţa sînt deci distincte şi

în acelaşi timp legate între ele : coincid printr-o latură a lor care este latura estetică. Orice operă de ştiinţă, este totodată operă de artă".

— Foarte frumos, sînt cu totul de acord cu el, ce spune mai departe ?

— „Latura estetică va putea rămîne mai puţin observată, atunci cînd mintea noastră este în întregime prinsă de efortul de a înţelege gîndirea savantului şi de a-i cerceta valoarea de adevăr. Dar ea nu mai rămîne neobservată atunci cînd de la activitatea de înţelegere trecem la cea de contemplare şi vedem acea gîndire dezvoltîndu-ni-se în faţă, limpede, netă, bine conturată, fără cuvinte de prisos, fără cuvinte nepotrivite ei"... [12, p. 98] Dar asupra părerilor lui Benedetto Croce, ca şi ale lui T. Vianu sau M. Ralea vom reveni de multe ori, în discuţiile noastre viitoare, aşa că vom încheia-o pe cea de azi citindu-ţi încă un fragment din capitolul „Frumosul ca valoare a expresiei, sau expresia pur şi simplu", ca să-ţi fac legătura cu *expresivitatea* pe care o combătea Mihai Ralea : „Valorile şi valorile negative estetice, intelectuale, economice şi etice au denumiri diferite în vorbirea comună, frumos, adevăr, bun, util, potrivit, just, exact etc. — care desemnează libera desfăşurare a activităţii spirituale, acţiunea, cercetarea ştiinţifică, producţia artistică bine reuşite, şi urît, fals, rău, inutil, nepotrivit, nejust, inexact — desemnînd activitatea stînjenită, produsul nereuşit. În folosirea lor lingvistică, aceste denumiri se transferă continuu de la o categorie de fapte la alta. De exemplu, *frumos* se întrebuinţează nu numai pentru o expresie reuşită, ci şi pentru un adevăr ştiinţific sau pentru o acţiune util înfăptuită şi pentru o acţiune morală ; de aceea, se vorbeşte de un *frumos intelectual,* de un *frumos al acţiunii,* de un *frumos moral...* Dar... neputîndu-se ignora faptul că tendinţa dominantă atît în limbajul comun, cît şi în cel filosofic este de a restrînge sensul cuvîntului „frumos" tocmai la valoarea estetică, ne pare uşor şi oportun să definim frumuseţea ca *expresie reuşită,* sau, mai bine zis, ca *expresie* pur şi simplu, fiindcă expresia care nu e reuşită, nu e expresie". [1.c, p. 149]

— Drept să-ţi spun nu văd deloc unde greşeşte Croce. E adevărat că ar trebui să citesc mai mult ca să-mi dau seama şi chiar voi face aceasta. Am să iau cartea lui cu mine, da ?

— Desigur, şi chiar am să te rog să-ţi mai scoţi şi nişte note cu problemele care crezi că ar intra în vederile noastre. Eu cred că am să-ţi pot satisface, întrucîtva, curiozitatea cu privire la neînţelegerea dintre Mihai Ralea şi Benedetto Croce, despre care ai pomenit, fiindcă am un articol al lui Ralea : „Specific şi frumos" publicat mai demult într-un volum intitulat *Comentarii şi sugestii* [13, p. 25], în care se referă la părerile lui Croce. Iată despre ce-i vorba : „Benedetto Croce este printre primii care au căutat să aşeze arta în cadrul facultăţilor noastre de cunoaştere, să facă din ea un mod de a percepe lumea exterioară".

— Exact ceea ce mi-ai citit mata ! Prim urmare, recunoaşte aceasta !

— Da, numai că după ce el însuşi discută pe larg ideile lui Croce în sensul că dezvoltă el însuşi ideile lui Croce, exemplificîndu-le într-un mod fermecător şi rezumîndu-le oarecum în fraza : „Arta are funcţia de a revela un colţ ascuns, misterios, mascat de banalitatea cotidiană. Ea ne scoate din comun, ca să ne transplanteze într-un mediu nebănuit încă". Totuşi, după aceste observaţii, Ralea ţine să aprecieze : „Identificînd arta cu expresivitatea, mi se pare că Benedetto Croce n-a mers decît pînă la jumătatea drumului. E adevărat... că artistul percepe şi exprimă individualul. Pentru aceasta el face apel la emoţiile sale strict personale. El dă lucrurilor şi fenomenelor o fizionomie unică. E adevărat, însă numai în parte. Dacă artistul ar exprima stări exclusiv specifice lui, n-ar putea fi înţeles de nimeni. Esteticianul italian uită că expresivitatea înseamnă comunicativitate socială. Aproape toate stările sufleteşti, plămădite şi prefăcute de mediu, au latură socială. Numai inconştientul, care nu e exprimabil, e strict personal... Dacă arta este expresivitate (o prelungire a expresiei emoţiilor artistului, materializată printr-o tehnică), atunci ea trebuie să suporte aceleaşi legi ca şi oricare expresie emotivă".

— Am înţeles, aşadar nu-l combate, cum avusesem eu impresia, ci-l completează. Asta-i altceva !

— Da, e altceva ! Poate că, de combătut, îl vom combate noi, cîndva !

— Cum asta ? De ce ?

— Ei, avem timp să vedem, acum cred că-i timpul să apucăm şi un ceas de somn !

PRIMII PAŞI CĂTRE FRUMOSUL ÎN MATEMATICĂ

— Acum, s-o pornim la drum, Bădie !

— Bine, numai că avem înaintea noastră un drum cam greu, fără cărări bătătorite şi fără indicatoare.

— De ce fără indicatoare ? Nu cumva exagerezi ? Uite ce am notat eu din una dintre cărţile ce le-am luat de la mata : „Faptul estetic se defineşte a fi *în primul rînd* o construcţie simbolică : orice fenomen estetic, artistic, este în primul rînd o construcţie, un aranjament tehnic al unei serii de date, care simbolizează o expresie : sunetul în muzică, culoarea în pictură, linia în desen etc. În *al doilea rînd* este o expresie individuală. Fenomenul artistic, spre deosebire de cel ştiinţific sau filosofic, se caracterizează printr-o prindere a elementului particular, specific fiecărui fenomen, care este exprimat printr-un fel de simbolizare, cîteodată printr-o reproducere a lui într-un anumit sens interpretativ al autorului, adică printr-o expresie. În *al treilea rînd*, fenomenul estetic are la bază o plăcere dezinteresată. Şi în ştiinţă poate fi o plăcere dezinteresată, totuşi ea are o finalitate practică. Plăcerea estetică este absolut dezinteresată... În *al patrulea rînd*, fenomenul estetic presupune o finalitate autonomă, adică nu serveşte nici un alt scop decît perfecţiunii sale însăşi" [11, p. 259—260]. Admiţînd, aşa cum am hotărît, că noi vom căuta *faptul estetic* în anumite probleme matematice, sper că acest indicator nu are nici un cusur !

— Ba eu am unele rezerve faţă de el ! Nu-s de acord nici cu „al doilea şi nici cu al treilea rînd". Mai întîi fiindcă noi nu vom face deosebire între „fenomenul artistic şi cel matematic", natural în condiţiile pe care le avem în vedere, cînd şi *fenomenul matematic frumos* este o expresie individuală, cu specificul său : număr, formulă, desen geometric, *complet lipsit* de orice aplicaţie practică şi utilitară, şi apoi

pentru că plăcerea produsă de *o problemă frumoasă* nu are alt scop decît încîntarea, bucuria de a fi imaginat-o şi a o prezenta, ca pe oricare operă de artă, deşi recunosc că nu-i la îndemîna oricui să o guste. Căci nu are nici o importanţă dacă mai tîrziu acea problemă matematică frumoasă îşi va găsi o aplicaţie practică, după cum nu are importanţă dacă un obiect de artă — un tablou celebru — este pus la licitaţie şi vîndut pe bani grei.

— Sînt cu totul de aceeaşi părere, dar, introducînd aceste corecţii, propun să păstrăm *indicatorul* ca un ghid în selectarea problemelor noastre. De cînd este omul pe pămînt i-a plăcut să creeze forme geometrice şi dacă nu ar fi simţit că desenînd o linie dreaptă sau curbă făcea o plăcere şi celor din jurul lui, nu şi-ar fi împodobit uneltele de muncă, nici nu ar fi zgîriat pereţii peşterilor cu ele. În orice parte a lumii ne-am îndrepta privirile, spre China, India, Indonezia, întreaga Asie Mică, Africa, Mexic etc., vom găsi opere de artă primitive, împletite cu desene geometrice. De altfel, în susţinerea părerii noastre îl avem alături şi pe Platon, care în *Philebos* arăta că : „ocupîndu-mă cu frumuseţea figurilor... eu mă gîndesc numai la ceea ce este drept sau curb, plan sau în spaţiu, obţinut prin compas riglă sau echer... căci numai acestea nu sînt frumoase pentru ceva, ci în sine şi prin origine". Aşa că, spune-mi, Bădie, încotro vrei să o apucăm ?

— Mi-ar plăcea să ne îndreptăm către fertila vale dintre Tigru şi Eufrat, unde, începînd cu peste 5 000 de ani î.e.n. sumerienii, apoi caldeenii, asirienii şi babilonenii au plămădit pe rînd, sau împreună, una dintre primele civilizaţii ale omenirii. Impunătoarele lor palate de cărămidă s-au risipit, dar au rămas sute de mii de tăbliţe de lut ars, imprimate cu scrierea cuneiformă, tăbliţe păstrate în multe dintre muzeele de pretutindeni, în cea mai mare parte aşteptînd încă să fie descifrate. N-am să discut despre conţinutul celor vreo 300 de tăbliţe cu probleme de matematică, fiindcă aceasta face parte din domeniul istoriei matematice, domeniu care, conform convenţiei noastre, nu-l voi ataca decît doar atîta cît este necesar ca să-ţi pot prezenta o *tăbliţă frumoasă*, foarte frumoasă chiar, deşi ca aspect nu se deosebeşte deloc de celelalte tăbliţe de aceeaşi natură (fig. 3). Din descifrarea tăbliţelor cu scriere cuneiformă s-a putut constata că babilonenii

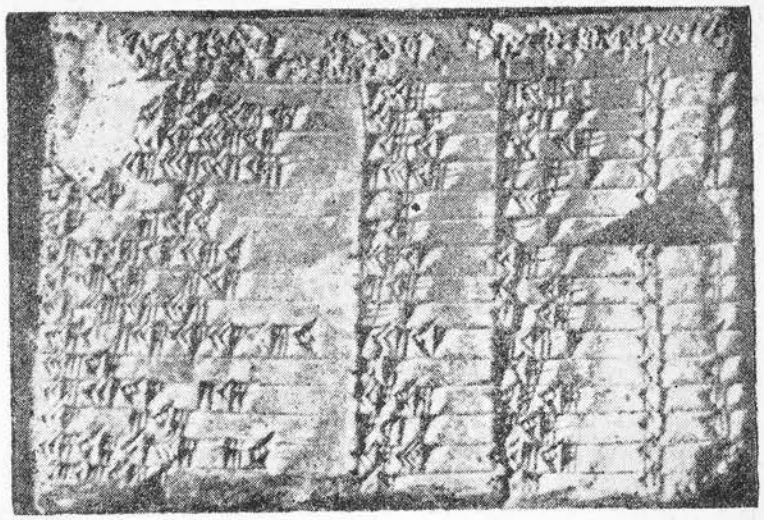


Fig. 3

cunoşteau foarte bine teorema lui Pitagora şi o aplicau la multe şi variate probleme de geometrie precum şi în problemele practice de arhitectură.

— Desigur, faptul este bine cunoscut şi foarte probabil că babilonenilor acest adevăr le-a fost transmis din preistorie, sub forma particulară a *funiei cu 12 noduri*, folosită şi de egipteni şi de toate popoarele din Antichitate care au lăsat în urma lor o civilizaţie. Funia cu 12 noduri era instrumentul nelipsit al *harpedonapţilor*, cum îi numeau egiptenii pe *întinzătorii de funii*, adică pe aceia care aveau atribuţia de a stabili un unghi drept pe teren. Era de ajuns să se fixeze, cu un ţăruş, unul dintre noduri (fig. 4) în vîrful în care trebuia să se construiască unghiul drept şi apoi să se întindă funia în direcţia uneia dintre laturile unghiului drept, bătîndu-se al doilea ţăruş în nodul al patrulea. După aceea se întindea bine funia şi al cincilea nod rezolva problema, căci în felul acesta se forma triunghiul dreptunghic cu laturile

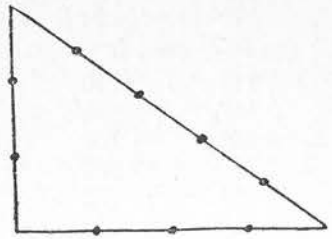


Fig. 4

3, 4 şi 5 ($5^2 = 3^2 + 4^2$), cunoscut sub numele de *triunghiul egiptean*.

— Află că acest triunghi, singurul în care laturile lui sînt în progresie aritmetică, se numeşte *triunghiul egiptean perfect*, fiindcă mai există unul, despre care am de gînd să-ţi vorbesc mai tîrziu. Acum vreau să-ţi amintesc că, spre deosebire de toate popoarele din Antichitate, care au cunoscut acest triunghi dreptunghic cu laturile 3, 4 şi 5, babilonenii au tradus această relaţie geometrică în limbaj algebric, adică, pentru ei, teorema geometrică a lui Pitagora însemna relaţia algebrică $a^2 = b^2 + c^2$, a fiind lungimea ipotenuzei, iar b şi c ale celor două catete, sau, mai bine zis, reprezenta o ecuaţie de gradul al doilea, care se cerea rezolvată în numere întregi. Aceasta a fost introducerea, acum urmează să-ţi prezint tăbliţa mea. Ea se numeşte „Plimpton 322", fiindcă face parte din Colecţia „Plimpton" a Universităţii din Columbia şi poartă numărul 322. A fost descifrată în 1945 de către Otto Neugebauer şi datează din secolele XIX—XVI î.e.n. [14]. Tăbliţa cuprinde 15 rînduri şi 4 coloane, prima dintre ele numărînd rîndurile. În celelalte coloane se află numere pitagoreice, adică acelea care verifică în numere întregi, relaţia $a^2 = b^2 + c^2$. Transcrisă în notaţia zecimală — fiindcă textul original cuprindea numerele scrise în sistemul sexazecimal — tăbliţa se prezintă aşa :

I	II	III	IV	
	a	*b*	*c*	
1	169	119	120	
2	4 825	3 367	3 456	
3	6 649	4 601	4 800	$a^2 = b^2 + c^2$
4	18 541	12 709	13 500	
5	97	65	72	
6	481	319	360	
7	3 541	2 291	2 700	
8	1 249	799	960	
9	769	481	600	
10	8 161	4 961	6 480	
.	. . . . .			
.	. . . . .			

Şi acuma te-ntreb : de ce tăbliţa aceasta este tot aşa de frumoasă ca şi o operă de artă, iar autorul ei trebuie să fi fost un artist, un mare şi autentic iubitor de frumos ?

— Nu mi-e greu să-ţi răspund, frumuseţea acestei table constă în *plăcerea dezinteresată* cu care a fost compusă şi, verifică, de altfel, toţi indicii indicatorului meu : 1) Este o construcţie a unei serii de date care simbolizează o expresie ($a^2 = b^2 + c^2$), 2) Este o expresie individuală, căci datele cuprinse în ea au fost descoperite de autor, el singur amuzîndu-se zile şi nopţi întregi ca să deducă *aceste triplete noi* şi deosebite de singurul cunoscut pînă atunci : $5^2 = 3^2 + 4^2$. 3) Aceste calcule, extrem de lungi şi de grele, asupra cărora vreau să mai insist după ce termin să-ţi răspund la întrebare, au la bază o plăcere dezinteresată, fără nici o finalitate practică. O plăcere *absolut dezinteresată,* operaţia fiind complet gratuită, executată doar din bucuria de a generaliza, de a da strălucire, unei proprietăţi care stabileşte că există o armonie între anumite numere, o unitate în diversitatea numerelor întregi. Cu asta am stabilit şi cel de-al patrulea punct, căci această tabelă nu are nici un alt scop decît perfecţiunea ei însăşi ! Şi acum sînt curios să văd dacă nu găsesc calea pe care a urmat-o matematicianul nostru ca să stabilească aceste triplete, fiindcă babilonenii, ca şi egiptenii şi celelalte popoare din orientul antic, nu au arătat niciodată metoda folosită ca să stabilească în mod logic vreun rezultat. „Fă aşa"

sau „aşa se face" este tot ce ne-au spus. Ştiu că problema aceasta a fost pusă şi rezolvată mai întîi de pitagoricieni, apoi a fost reluată în şcoala lui Platon, iar mai tîrziu, peste vreo şapte secole, Diophant din Alexandria i-a stabilit o soluţie generală.

— N-ar fi exclus ca Pitagora să fi adus din călătoria sa în Mesopotamia nu numai teorema ce-i poartă numele, dar şi metoda de a rezolva, în numere întregi, ecuţia $a^2 = b^2 + c^2$.

— Pentru greci, metoda avea mai mare importanţă decît pentru babiloneni, fiindcă grecii considerau că numai întregii sînt numere, pe cînd celelalte popoare din Antichitate aveau o noţiune mai largă şi deci mai exactă despre numere, admiţînd printre ele şi pe acelea raţionale şi chiar iraţionale. Pitagoricienii au stabilit soluţia generală a ecuaţiei $a^2 = b^2 + c^2$, în numere întregi, considerînd că a, b şi c sînt numere de forma :
$a = 2n^2 + 2n + 1$; $b = 2n + 1$; $c = 2n^2 + 2n$, aceste expresii verificînd relaţia : $(2n^2 + 2n + 1)^2 = (2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2$.

Acum să folosesc aceste formule, aplicîndu-le la tabela babiloneană.

Din datele din rîndul întîi avem : $b = 2n + 1 = 119$, deci $n = 59$. De aici rezultă : $c = 2n^2 + 2n = 7\,080$, aşadar alt număr decît 120, cum îl dă tabela.

Să încerc şi formula stabilită în şcoala lui Platon : $a = n^2 + 1$; $b = n^2 - 1$; $c = 2n$; de unde $(n^2 + 1)^2 = (n^2 - 1)^2 + 4n^2$.

Încercînd această formulă rezultă din $c = 2n = 120$, $n = 60$; de aici $b = n^2 - 1$, adică $b = n^2 - 1 = 3\,599$, aşadar nici această formulă nu a fost folosită !

— Iată dar că babiloneanul meu nu vrea să se lase descoperit ! Totodată trebuie să-mi cer iertare faţă de Pitagora, căci după cum ai dovedit, formula lui nu răspunde la cea din tăbliţa cuneiformă, ceea ce arată că foarte probabil ea a fost stabilită chiar în şcoala sa !

— După această călătorie în Babilon, eu aş propune una în Egipt. Mă atrage acolo altă frumuseţe din geometrie învăluită în mister : *marea piramidă a lui Cheops.*

— Atunci cînd a fost construită era cel mai înalt monument de pe pămînt şi a rămas una dintre cele 7 minuni ale lumii ;

— Nu numai cel mai uriaş monument, un munte înalt de 150 de metri care se zăreşte de la 40 km depărtare, dar şi cel mai straniu ; o frumuseţe solemnă şi înfricoşătoare ca moartea, pe care ţi-o evocă pretenţia ei de a supravieţui dincolo de durata vieţii pe pământ !

— Şi totuşi, piramida aceasta cu baza un pătrat şi cu feţele laterale în formă de triunghiuri isoscele ce se înalţă spre cer, te impresionează prin faptul că măreţia şi armonia ei a fost calculată cu precizie şi nu a fost obţinută din întîmplare. O ştim cu siguranţă din scrierea lui Herodot. El povesteşte că preoţii egipteni, în speţă arhitecţii, i-au destăinuit lui că secretul armoniei ce se degajă din piramida lui Cheops se află în faptul că *aria triunghiului unei feţe laterale este egală cu aria pătratului care are drept latură înălţimea piramidei.*

— Relaţia merită să fie stabilită. Să desenăm o piramidă pătrată cu vîrful în A şi semiprofilul meridian AOC (fig. 5).

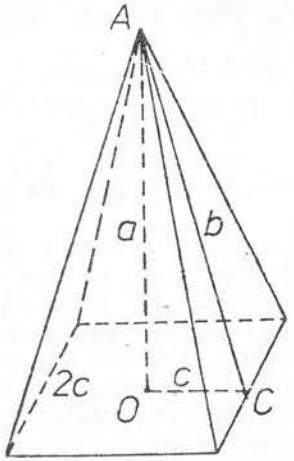


Fig. 5

Dacă notăm cu a înălţimea ei, cu b apotema unei feţe laterale a piramidei şi cu $2c$ latura pătratului de bază, din destăinuirea matematicianului egiptean rezultă că aria triunghiului lateral isoscel (bc) este egală cu aria pătratului ce are ca latură înălţimea piramidei : a^2, adică avem :

(1) $bc = a^2$.

Or, relaţia (1) poate fi scrisă sub formă de proporţie : $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$

şi aceasta ne spune că : latura pătratului, adică înălţimea piramidei, este medie proporţională între două dintre laturile triunghiului meridian AOC. Dar acest triunghi fiind dreptunghic, avem :

(2) $b^2 = a^2 + c^2$ şi, ţinînd seama de (1) :

$b^2 = bc + c^2$ sau, prin împărţire cu c^2 ;

(3) $\left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{b}{c} - 1 = 0$

— Cunosc această ecuaţie, ea este caracteristică segmentelor împărţite în raportul tăieturii de aur. Notînd raportul $\frac{b}{c}$ cu litera grecească Φ, iniţiala numelui *Fidias*, aşa cum o face Matila Ghyka în cărţile lui (15), putem scrie ecuaţia la care ai ajuns sub forma :

(4) $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, de unde : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180...$

— Să mai observăm că ecuaţia (4) se mai poate scrie sub forma $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Şi acum, să tragem concluzia : În triunghiul meridian al piramidei lui Cheops, ipotenuza se află în tăietură de aur cu cea mai mică dintre catete. Acesta este, Bădie, triunghiul care poartă numele de *triunghiul egiptean.* Dar tăietura de aur se mai găseşte inclusă şi în dimensiunile *camerei regelui,* aflată în interiorul piramidei, la care se ajunge printr-un coridor ce comunică cu exteriorul printr-o deschidere în unul dintre pereţii exteriori, aflată la vreo 14 m deasupra solului. Dimensiunile acestei camere, de formă

paralelipipedică sînt 1, 2, $\sqrt{\frac{5}{2}}$ baza fiind un pătrat dublu (cu laturile 1 și 2), iar înălțimea egală cu jumătate din diagonala acestui dreptunghi : $\sqrt{\frac{5}{2}}$(15). Cine, și cînd s-a descoperit că, dacă două segmente dintr-o figură se află în raportul tăieturii de aur, acea figură face cu totul altă impresie decît celelalte în care această împărțire nu-i considerată, nu se va ști niciodată, fiindcă este un bun transmis din preistorie. Ipoteze există și le vom discuta mai tîrziu. Cert este că piramida lui Cheops, și altele în care raportul acesta a fost respectat, impune prin măreția ei, prin armonia și soliditatea formei. Mulți s-au întrebat dacă ea ar mai face aceeași impresie dacă ar fi mai înaltă sau mai turtită ; simpatizanții tăieturii de aur susțin însă că desăvîrșita ei proporționalitate se datorește numai acestui raport, care a căpătat numirea de tăietura de aur sau de număr de aur de la Leonardo da Vinci și de atunci a păstrat-o pînă azi.

— Cred, dragă Nucule, că ar fi bine să ne oprim mai mult asupra acestei teme, fiindcă ea răspunde la ambele aspecte ale anchetei noastre. Mai întîi este o problemă captivantă prin ea însăși : *Luca Pacioli* a scris o carte întreagă despre acest subiect și a intitulat-o *Proporția divină*, iar prietenul său *Leonardo da Vinci* a lăsat deoparte zecile de planuri și treburi ce le avea, numai ca să facă desenele necesare acestei cărți. Asta, în secolul al XV-lea, iar în secolul XX, Matila Ghyka a publicat mai multe cărți cu acest subiect, una intitulată chiar *Numărul de aur* [15]. Apoi, tăietura de aur apare ca un element matematic care intervine în exprimarea frumosului în artă. Și, mai există un al treilea motiv : vom avea atîtea alte probleme de discutat încît nu cred că vom mai avea cînd să ne mai întoarcem la aceasta, dacă nu ne decidem să spunem acum tot ce avem noi de spus !

— Ai precizat bine, Bădie : vom spune numai *ce știm noi* despre tăietura de aur, fiindcă vor mai fi și multe care nu le știm !

— Iar printre cele ce știm va trebui să aducem vorba și despre cei ce nu recunosc nici un merit tăieturii de aur ! Printre aceștia se află și Benedetto Croce, cred că ai citit și despre aceasta ?

— Se putea să nu o fi făcut ? N-am eu oare amintirile din trecut ca să nu știu ce m-ar aștepta dacă aș sări vreun rînduleț mai important dintr-o carte luată de la mata ? Iar dacă-i să discutăm tăietura de aur pe-ndelete, atunci trebuie să pornim de la greci, fiindcă ei au pus-o pe șleau, foarte probabil după ce au importat-o de la egipteni. A preocupat mult pe pitagoreici, apoi pe Platon și, natural, pe Euclid, cu care prefer să încep, ca să o prezint mai întîi din punct de vedere riguros geometric. În *Elemente* se vorbește de ea pentru prima oară în problema 11 din Cartea a doua, sub această formă : „Să se taie o dreaptă dată, în așa fel ca dreptunghiul cuprins de dreapta întreagă și unul dintre segmente să fie egal cu pătratul segmentului rămas". Mai întîi să precizez că matematicienii greci foloseau termenul „dreaptă" cu înțeles de „segment de dreaptă", apoi că problema aceasta este un exemplu de rezolvare, pe cale geometrică, a unei ecuații de gradul al doilea. Metoda folosită, cunoscută sub numele de „aplicarea ariilor", conduce la determinarea punctului C de pe segmentul AB, astfel ca să se realizeze relația cerută (fig. 6). Notînd $AB = a$ și $AC = x$, trebuie ca $a\,(a-x) = x^2$.

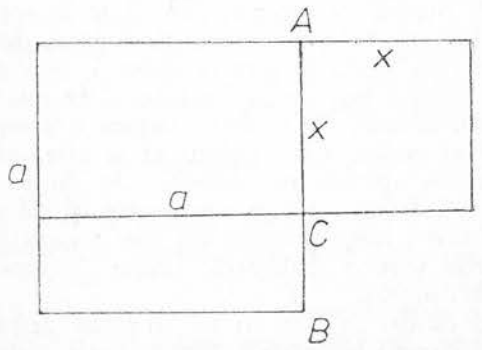


Fig. 6

Sau sub forma :

$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$, care însă nu-i menţionată. Se pare că în Cartea a doua această problemă serveşte drept introducere la problema 30 din Cartea a VI-a, care-i formulată astfel : „O dreaptă finită, dată, să se taie după un raport extrem şi mediu". Aici, în Cartea a VI-a, se află şi definiţia care nu a fost introdusă în Cartea a II-a : „Se zice că o dreaptă se taie după un raport extrem şi mediu cînd, după cum întreaga către segmentul mai mare tot aşa cel mai mare către cel mai mic". Iată tăietura de aur care pentru Euclid şi ceilalţi geometri greci avea numele de *împărţirea unui segment în medie şi extremă raţie.*

— Era şi natural să fie atîta şi nimic mai mult, pentru că Euclid privea această expresie cu sobrietatea omului de ştiinţă şi a numit-o potrivit calităţilor ce le avea : pe de o parte o *medie proporţională,* dar nu o *oarecare medie proporţională* între două mărimi oarecari independente între ele, căci atunci s-ar fi chemat pur şi simplu *medie proporţională* sau *medie geometrică,* ci altfel, anume că segmentul care este medie proporţională trebuie legat de celelalte două segmente, fiind el însuşi o parte, partea cea mai mare a unuia dintre ele. Dacă $AB=AC+CB$ atunci $AC=AB-BC$. Euclid nu se entuziasmează şi nici nu-şi permite vreun sentimentalism faţă de această relaţie, în adevăr remarcabilă, asupra căreia mai revine şi în Cartea a XIII-a. [16]. Aceasta o face Pitagora şi elevii lui, Platon şi alţi matematicieni înflăcăraţi. Şi fiindcă cu Pitagora am să te las pe tine să te descurci, eu vreau să citesc numai acel pasaj din *Timeu* în care Platon face aluzie la această tăietură, fără a o denumi aşa cum a făcut-o mai tîrziu Euclid : „Dar nu este cu putinţă ca doi termeni să formeze singuri o compoziţie frumoasă fără al treilea. Căci trebuie să se afle între ei o legătură care să-i apropie pe amîndoi. Or, dintre toate legăturile, cea mai frumoasă este aceea care îşi dă sieşi şi termenilor pe care-i leagă unitatea cea mai completă. Şi aceasta este proporţia care o realizează, fireşte, în modul cel mai frumos". [17, p. 50].

— Cred că ori de cîte ori va fi vorba despre frumuseţea unor construcţii geometrice, Platon va fi acela la care va trebui să ne întoarcem. Nimeni, după el, nu va mai avea

ceva de adăugat. Iată, de pildă, acest citat din *Philebos,* care l-am învăţat pe dinafară : „Ceea ce înţeleg aici prin frumuseţea formei nu este ceea ce înţelege de obicei omul comun sub acest nume, cum ar fi, de exemplu, aceea a obiectelor vii sau a reproducerilor lor, ci ceva rectiliniu şi circular, executat cu ajutorul compasului, a frînghiei şi a echerului. Căci aceste forme nu sînt ca şi celelalte, frumoase numai în anumite condiţii, ci sînt frumoase întotdeauna, în sinea lor". Răspunde-mi, Bădie, au trecut peste 2 200 de ani de cînd le-a spus el, sau le-a spus ieri ori acum, ca să ne încurajeze pe noi ?

— Mă tem că am să încep să-i dau dreptate lui Mihai Ralea în ceea ce spunea despre sentimentalism ! Dacă-ţi dăruieşti tot elanul lui Platon, ce-ţi mai rămîne pentru Pitagora şi elevii lui, care au fost copleşiţi de tăietura de aur ?

— În adevăr, pe tăietura de aur se bazează construcţia poligoanelor regulate convexe sau stelate cu 5, 10 şi orice multiplu par de 5 laturi, şi aceasta a fost opera pitagoreicilor. Aceste construcţii se găsesc în Cartea a IV-a din *Elementele* lui Euclid, începînd cu propoziţia a 11-a, sau mai bine zis chiar cu problema din propoziţia a 10-a : „Să se construiască un triunghi isoscel avînd fiecare din unghiurile de la bază dublu al celui rămas". Această problemă, care se rezolvă prin aplicarea împărţirii unui segment în tăietura de aur, se foloseşte apoi la construcţiile ce urmează. În *Comentariul* lui V. Marian se spune clar că aceste propoziţii, ca de altfel întreaga Carte a IV-a, „este o descoperire a pitagoreicilor". Şi mai departe : „Originea pitagoreică a construcţiei laturii pentagonului reiese şi din faptul că semnul de recunoaştere al pitagoreicilor era pentagonul stelat (pentagrama)... Se pare chiar că alegerea pentagramei s-a făcut tocmai pentru a reaminti această descoperire importantă". [18].

— N-ai vrea să ne reamintim şi noi de construcţia pentagonului ?

— Ba da. Am să folosesc metoda pe care a arătat-o Claudius Ptolemeu în Cartea I din *Almagesta,* fiindcă e cea mai simplă. În cercul O se iau doi diametri perpendiculari, AB şi CD (fig. 7). Raza OA se împarte în două părţi egale, $AM=MO$, şi din M ca centru şi cu raza MC se duce arcul de cerc CI, punctul I, fiind intersecţia acestui arc cu AB.

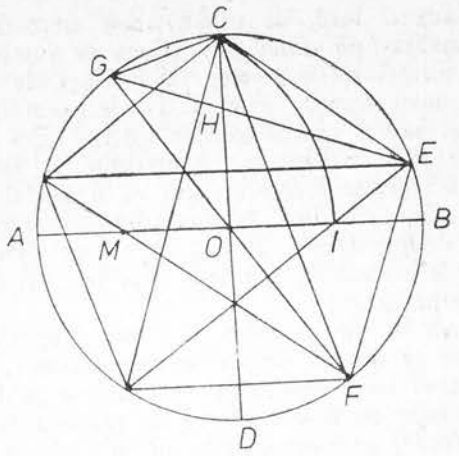


Fig. 7

Coarda CI este latura pentagonului, iar segmentul OI este latura decagonului înscris în cerc. E clar că ducînd diagonalele pentagonului regulat se găseşte pentagonul stelat. La rîndul lor, intersecţiile laturilor pentagonului stelat determină un nou pentagon convex, iar şirul acestor două feluri de pentagoane se continuă, alternînd, la nesfîrşit. Aceasta pentru că latura pentagonului convex este incomensurabilă cu latura pentagonului stelat.

— Incomensurabilitatea se poate stabili uşor. Dar ca să nu îmbîcsesc prea mult figura ta, voi mai face una, simplificată (fig. 8). Se vede că triunghiurile CBd, ABe, dEa şi DCb sînt isoscele şi egale. Avem $BC=dC$ şi $aC=ad$, iar de aici rezultă : $AC-BC=AC-dC=Ad$, dar $Ad=aC=ad$, deoarece şi triunghiul Cad este isoscel. Aşadar, $AC-BC=ad$ şi aceasta arată că *diferenţa dintre latura pentagonului stelat şi a pentagonului convex, înscrise în acelaşi cerc, este egală cu latura pentagonului stelat care se formează în interiorul lui, prin intersecţia diagonalelor sale.*

— Frumuseţea este că aceste două laturi nu sînt numai incomensurabile, dar şi că raportul lor este tocmai numărul de aur ! Ai putea-o dovedi ?

— Nimic mai simplu, ba chiar am să dovedesc mai mult decît îmi ceri. Eu am să mă folosesc de figura mea (fig. 7),

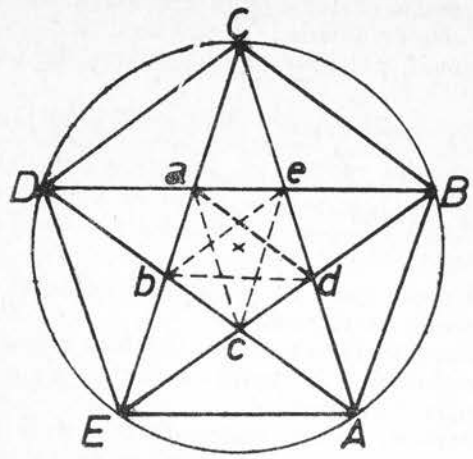


Fig. 8

pe care am s-o mai completez astfel : CG este latura decagonului convex înscris, iar GE latura decagonului stelat, CE latura pentagonului convex şi CF latura pentagonului stelat. Fiindcă GE este bisectoarea unghiului CGF şi taie CO în H, putem scrie : $\frac{OH}{HC}=\frac{OG}{GC}$. Dar triunghiurile GHO şi CGH sînt isoscele de unde rezultă $GH=GC=HO$. Înlocuind în proporţia pe care am scris-o avem : $\frac{OH}{HC}=\frac{OG}{OH}=\Phi$. Am înlocuit şi OG cu OC, ţinînd seama că $OG=OC$, ca raze. Aşadar, *latura decagonului stelat taie raza cercului în tăietura de aur.* Dar am văzut că $OH=GC$, aşa că înlocuind avem : $\frac{OC}{GC}=\Phi$, ceea ce arată că *raportul dintre raza cercului şi latura decagonului înscris este egal cu numărul de aur.* Acum să consider triunghiurile isoscele asemenea CEF şi GHO, din care rezultă $\frac{CF}{FE}=\frac{GO}{OH}=\frac{OC}{OH}=\Phi$. Aşadar,

latura pentagonului stelat este în tăietură de aur cu latura pentagonului convex, înscris în același cerc.

Și, în rezumat, pot scrie că într-un cerc dat există aceste rapoarte :

$$\frac{\text{latura pentagonului stelat}}{\text{latura pentagonului convex}} = \frac{\text{latura decagonului stelat}}{\text{raza cercului}} =$$

$$= \frac{\text{raza cercului}}{\text{latura decagonului convex.}} = \Phi.$$

— Nu se poate spune că pitagoreicii nu aveau argumente serioase să admire pentagrama !

— Admirație e prea puțin spus, cred că ei o adorau, mai ales dacă ne gîndim și la faptul că tăietura de aur se poate construi cu rigla și compasul.

— Ai dreptate, pentru matematicienii greci acest argument trage greu în cumpănă, or tăietura de aur este, înainte de toate, *o medie proporțională*, așadar, *se poate construi cu rigla și compasul*. Și, efectiv, cum s-ar desfășura operația ? Să admitem că se dă un segment AB și îl caut pe C astfel ca $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

— Cunosc o metodă care se bazează pe proprietatea puterii punctului A față de cercul tangent în B (fig. 9). Ridicînd perpendiculara în B pe AB și luînd $BD = AB$, se duce cercul cu centrul în O de rază $OB = \frac{AB}{2}$. Aleg secanta AO

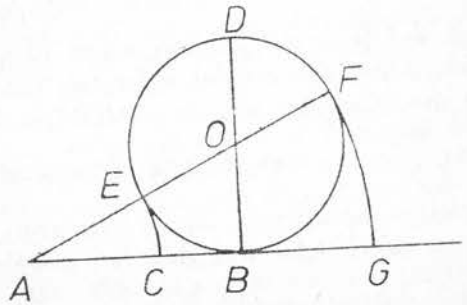


Fig. 9

ce trece prin O. Ea taie cercul în E și F, determinînd astfel relația

$$(1) \qquad AB^2 = AE \cdot AF$$

Transfer segmentele AE și AF pe AB. Avem $AE = AC$ și $AF = AG = AB + BG$. Acum începe partea frumoasă și surprinzătoare a demonstrației, fiindcă eu am pornit de la *întregul segment AB ca medie proporțională* și nouă trebuie să ne apară *numai o parte a lui*, în această calitate, partea aceea care să ne arate care-i tăietura de aur. Or, din construcție se vede că : $AB = BD = EF$ și de aici : $AE = BG = AC$, iar $AF = AE + EF = AC + AB$, așa că înlocuind în (1) avem : $AB^2 = AC \cdot (AC + AB)$. O scriu sub formă de proporție : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC + AB}{AB}$. De aici se vede imediat că la aceste două rapoarte putem adăuga al treilea, obținut prin diferența numărătorilor și a numitorilor :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC + AB}{AB} = \frac{AC}{CB}$$ din care păstrăm primul și ultimul :

$$(2) \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Construcția se reduce deci la găsirea segmentului $AC = AE$, după ce a fost dusă secanta din A care trece prin centrul cercului tangent în B la AB, cercul avînd ca diametru pe AB.

— Metoda este cu adevărat frumoasă și surpriza ei nu se oprește numai la aceea pe care ai menționat-o și prin care ai stabilit tăietura cerută.

— Desigur, ea ne mai descoperă ceva tot așa de frumos, de îndată ce ne îndreptăm atenția înspre punctul G, situat în exteriorul segmentului AB. În acest caz, segmentul AG apare împărțit în tăietura de aur de punctul B, cu alte cuvinte segmentul AB devine el medie proporțională, căci putem scrie, folosind (2) și egalitățile de mai sus, $AC = BG$ și $AG = AB + BG$:

(3). $\frac{AB+AC}{AC+CB}=\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{AC}$ sau $\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{BG}$

— Şi apoi, repetînd procedeul în (3) îl aflăm pe AG medie proporţională între segmentele $AB+AG$ şi AB ; $\frac{AG}{AB}=$

$=\frac{AG+AB}{AB+BG}=\frac{AG+AB}{AG}$ adică $\frac{AG}{AB}=\frac{AG+AB}{AG}$.

Procesul se repetă la nesfîrşit, după cum l-am mai văzut, sub altă înfăţişare, în cazul pentagramei ; aceasta din cauza incomensurabilităţii segmentelor ce intră în joc. De altfel, considerînd punctul B în interiorul segmentului AG, punctul C în interiorul segmentului AB şi aşa mai departe avem :

$AG-AB=AC$; $AB-AC=BC$; $AC-BC=$ ...

Adică, prin scăderea repetată a segmentelor mai mici din cele mai mari se obţin alte segmente, care rămîn tot în tăietura de aur.

— Nu-i greu de înţeles că această proprietate a segmentelor ce se află în tăietura de aur, de a-şi transmite însuşirea unul altuia la nesfîrşit, i-a încîntat pe matematicienii greci, iar pe Fra Luca Pacioli l-a uluit într-atît încît l-a făcut să atribuie acestei proporţii o origine divină ! Pare să fie o armonie care se transmite de la un segment la altul, ca o permanenţă a vieţii !

— Dar e chiar aşa în realitate, fiindcă prin numărul de aur se exprimă şi una dintre manifestările vieţii : *legea creşterilor organice*, pe care a stabilit-o, la începutul secolului al XIII-lea, *Leonardo Fibonacci*. Problema, devenită de atunci celebră, intitulată *a iepurilor de casă*, se află în capitolul al XII-lea din *Cartea Abacului*. Dat fiind farmecul ei, am s-o citesc chiar după original : „Cîte perechi de iepuri de casă se nasc într-un an, dintr-o singură pereche de iepuri ? Pentru a afla cîte perechi de iepuri se nasc într-un an, cineva a aşezat o pereche de iepuri într-un loc îngrădit cu zid, ştiind că, după o lună, o pereche de iepuri aduce pe lume o altă pereche, iar iepurii încep să dea naştere la

pui de la vîrsta de o lună. Deoarece prima pereche dă descendenţi în prima lună, perechea se dublează şi, în această lună se obţin două perechi, dintre acestea o pereche, şi anume prima, va avea descendenţi şi în luna următoare, astfel că în luna a doua vor fi trei perechi ; dintre acestea în luna următoare două perechi vor avea descendenţi astfel că, în luna a treia se mai nasc două perechi de iepuri şi numărul de perechi de iepuri din această lună este cinci. Dintre acestea, în aceeaşi lună vor avea urmaşi trei perechi, iar numărul de iepuri din luna a patra va fi opt. Dintre acestea, cinci perechi vor da naştere la alte cinci perechi, care adunate la cele opt perechi formează în luna a cincea treisprezece perechi...". Astfel, Leonardo Fibonacci a găsit că există *o lege numerică* prin care se poate exprima o însuşire a materiei vii, şi anume, sub forma unui şir de numere întregi : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

care are proprietatea că fiecare termen al şirului, începînd de la al treilea, este suma celor doi termeni precedenţi : (1) $2=1+1$; $3=2+1$; ...$13=8+5$; ...$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ($n=3, 4...$). Acest şir, dublu aditiv, poartă numele descoperitorului, adică „şirul lui Fibonacci" sau „legea creşterilor organice".

— Deocamdată nu văd alta decît un oarecare şir numeric crescător. E poate şi mărginit ?

— Desigur ! Cred că te va copleşi, cînd îl vei privi mai îndeaproape.

— Puternică afirmaţie. Dovedeşte-o !

— Iat-o : Consider un şir numeric oarecare :

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots\ldots$$

In cazul şirului Fibonacci, avem prin definiţie

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1} \text{ adică } u_{n+1}>u_n.$$

$$\text{Însă } u_{n+1}=u_n+u_{n-1}<u_n+u_n=2u_n$$

De aici rezultă că $\frac{u_{n+1}}{u_n}<2$.

— Inegalitatea pe care ai scris-o dovedeşte că şirul tău este şi mărginit, aşadar el este convergent, dar această proprietate e prea banală ca să mă „copleşească" !

— Te grăbești, Bădie, eu n-am terminat. Scriu deci că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=A,\ \text{însă:}\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+u_{n-1}}{u_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

Cu alte cuvinte, $A=1+\frac{1}{A}$.

Așadar, dacă în locul literei A aș pune Φ, găsim ecuația pe care o satisface numărul de aur: $\Phi=1+\frac{1}{\Phi}$.

Înseamnă că putem scrie că $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\Phi$ și de aici rezultă că raportul dintre doi termeni consecutivi din șirul lui Fibonacci corespunde la o valoare aproximativă a lui Φ, iar această valoare va fi cu atît mai apropiată de numărul de aur cu cît indicele „n" al celor doi termeni consecutivi din șrrul considerat este mai mare. [19].

— Trebuie să remarcăm și faptul că *proprietatea de dublă aditivitate* a șirului Fibonacci o regăsim și la *șirul puterilor succesive ale numărului de aur*. În adevăr, pornim de la relația caracteristică $\Phi=1+\frac{1}{\Phi}$. O scriem sub formă întreagă: $1+\Phi=\Phi^2$ și apoi înmulțim ambii membri cu $\Phi>0$. Rezultă egalitățile:

$$1+\Phi=\Phi^2;\ \Phi+\Phi^2=\Phi^3;\ \ldots\ \Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^n\ \ldots$$

Așadar, considerînd progresia geometrică cu rația Φ:

$$1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \ldots\ \Phi^n\ \ldots.$$

termenii ei satisfac proprietatea de dublă aditivitate

$$\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}.$$

— Ce-ar fi dacă am încerca o generalizare, adică am considera o progresie geometrică: $u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}\ldots$ cu rația

$q>0$, în care termenii să aibă și proprietatea de dublă aditivitate, adică, pe de o parte $u_{n+1}=q^n$ și, pe de altă parte, $q^n=q^{n-1}+q^{n-2}$? Simplificînd cu q^{n-2} regăsim ecuația numărului de aur, ale cărui soluții sînt $q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

— Este în adevăr o generalizare, căci aceste soluții îți permit să consideri o infinitate de progresii geometrice care sînt și șiruri dublu aditive, avînd ca termen general

$$u_{n+1}=q^n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

unde C_1 și C_2 sînt două constante arbitrare. Determinarea unui anumit șir depinde numai de condițiile pe care le impui primilor doi termeni u_1 și u_2, prin care poți stabili valorile constantelor C_1 și C_2. [20].

— Da, toate șirurile obținute astfel prin particularizarea constantelor C_1 și C_2 au proprietatea de dublă aditivitate. Totodată ele reprezintă și cazurile restrictive în care termenilor acestor șiruri li se mai impune și condiția de a face parte dintr-o progresie geometrică. Forma cea mai generală a șirurilor Fibonacci este însă aceea a unui șir: $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ în care între termenii ei să existe *numai proprietatea* $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. Un asemenea șir are proprietatea de a reflecta prin numerele care-l compun, însușirea materiei vii de *a se dezvolta prin compuneri care se adună succesiv*. Legea aceasta a fost verificată în mod statistic de către botaniști, măsurînd distanța dintre nodurile de unde apar frunzele pe o tulpină sau ramurile de-a lungul unei crengi; de asemenea, zoologii au arătat că această lege se aplică la formarea cochiliilor melcilor, a scoicilor, la creșterea oaselor, a coarnelor etc., toate aceste elemente dezvoltîndu-se numai de la o extremitate și păstrînd forma inițială, prin transformarea lor în altele mai mari, dar asemenea celor anterioare.

— Și acum geometria ne cheamă, ca să ne arate modelul acestui fenomen reprezentat printr-o prea frumoasă curbă, ce se numește *spirala logaritmică*. Atîta de mult i-a plăcut această curbă marelui matematician Jacob Bernoulli, încît a dorit să nu se despartă de ea nici după moarte. De aceea, a cerut ca imaginea acestei spirale să-i fie săpată pe piatra

de pe mormînt, cu inscripția: „Eadem mutata resurgo", care înseamnă: „Mă transform rămînînd aceeași".

— Aș vrea să adaug că tîlcul acestei inscripții se află în proprietatea spiralei logaritmice de a rămîne neschimbată dacă se mărește sau se micșorează într-un raport constant, adică dacă se transformă prin asemănare. Curba transformată, deși asemenea cu prima, este și egală cu ea, însă rotită față de cea dintîi cu un anumit unghi.

— Curba aceasta a fost îndrăgită chiar din preistorie, fiindcă o găsim de atunci ca model decorativ. Oamenii au observat-o pe cochilia melcilor și au copiat-o, reproducînd-o. Desigur că ei nu i-au cunoscut proprietățile și nici nu au făcut deosebirea dintre spirala logaritmică și multe alte spirale care au o înfățișare asemănătoare, prin faptul că reprezintă o încolăcire în jurul unui punct fix. Numai matematicienii deosebesc aceste curbe între ele prin proprietățile ce le caracterizează. Frumoasă și celebră este și spirala descoperită de Arhimede, care-i poartă și numele, dar Arhimede și-a dorit piatra mormîntului împodobită cu o sferă înscrisă într-un cilindru și se spune că Cicero i-a putut descoperi locul unde a fost îngropat, căutînd acest desen.

— Și această problemă, de o frumusețe pură, te încîntă prin perfecțiunea ei intimă, prin unitatea ce se degajă din diversitatea cazurilor posibile. Cum aș putea trece pe lîngă ea fără să-i aduc prinos de admirație? Căci oricare ar fi dimensiunile unei sfere, una dintre proprietăți este că volumul ei va fi întotdeauna egal cu 2/3 din volumul cilindrului circumscris! Și dacă și-a dorit-o înscrisă pe ea dintre toate descoperirile lui, care au fost destule, înseamnă că aceasta trebuie să-i fi fost, cine știe de ce, cea mai dragă! Dar, iartă-mi întreruperea, știu că aveai de gînd să te oprești asupra proprietăților spiralei logaritmice.

— Da. Țin mult să amintesc două dintre proprietățile ei caracteristice. Ea este *singura* dintre *toate spiralele în care toate spirele ei sînt tăiate de orice rază dusă prin punctul fix O* (fig. 10) *sub un unghi constant* $\Phi < \frac{\pi}{2}$. Este o proprietate care amintește de cerc, căci dacă unghiul Φ este drept $\left(\Phi = \frac{\pi}{2}\right)$ atunci spirala logaritmică se transformă în cerc. Cea-

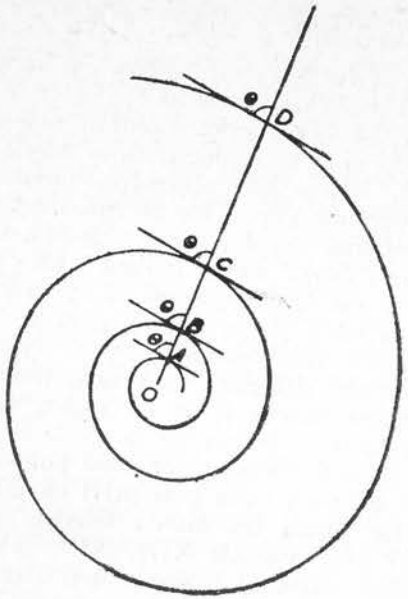


Fig. 10

laltă proprietate este și mai fantastică, deoarece ca să spun că-i frumoasă mi se pare prea puțin! Iat-o: Dacă se duce o rază prin O, toate segmentele consecutive: *OA, OB, OC,* ...determinate de spirele curbei pe rază, sînt în *tăietura de aur*, adică există relația:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \ldots \Phi .$$

Așadar, iată chiar *modelul creșterilor organice ilustrat*, de data aceasta nu printr-un șir de numere, ci *printr-o figură* geometrică al cărei secret este închis într-o formulă simplă, dar nu tocmai ușor de descifrat: $r = ae^{b\varphi}$. Forma acestei spirale apare peste tot în lumea plantelor și a animalelor, chiar și acolo unde te aștepți mai puțin, ca, de exemplu, în ochiurile care împodobesc penele din coada unui păun. Atunci cînd coada lui este răsfirată, frumoasele ochiuri de pe ea nu sînt așezate la întîmplare, ci repartizate de-a lungul ramurilor a două spirale logaritmice, așezate simetric! Oare nu-nseamnă nimic aceste coin-

cidenţe ? Spune-mi, Bădie : „Unde vei găsi cuvîntul/Ce exprimă adevărul ?".

— Mă duc să fac o cafea, fiindcă mi se pare că te-ai cam înfierbîntat şi mă tem să nu iei foc !

— Degeaba mă învinuieşti ! Cred că nici mata nu poţi rămîne de gheaţă cînd te întîlneşti cu o simplă problemă de geometrie pură, cum a fost aceasta a spiralei logaritmice, şi ea îţi descoperă că e în stare să oglindească procesul de dezvoltare a materiei vii, aşa cum se petrece el în intimitatea lui ! Şi care-i cauza acestei minuni ? Una foarte simplă, aproape să nu-ţi vie să crezi, aceea că în structura ei se găseşte tăietura de aur ! Şi, ca şi cum atîta ar fi prea puţin, se mai adaugă şi o *altă problemă, tot de geometrie plană,* în aparenţă complet deosebită de prima, fiindcă-i vorba de pentagonul regulat convex şi de cel stelat, care pretinde şi ea să *înfăţişeze acelaşi proces de dezvoltare a materiei vii,* tot din cauză că şi în forma celor două poligoane este amestecată tăietura de aur ! Oare poţi privi cu indiferenţă planşele acestea din cartea lui Matila Ghyka, care reprezintă flori şi scoici ? [15, planşele XIII, XIV, XV şi XVI]. Şi, acum, că ai adus cafeaua, lasă-mă să-ţi citesc şi ce spune autorul : „creşterea fiinţelor vii, creştere care se face din interior în exterior, ca printr-o umflare şi nu prin aglutinare ca la cristale, această creştere vie tinde să producă forme succesive „omotetice", adică „asemenea cu ele însăşi". Aici se manifestă din nou diferenţa esenţială între simetria hexagonală care corespunde perfect echilibrului inert... şi simetria pentagonală care introduce, atît în plan, cît şi în spaţiu, o pulsaţie în progresie geometrică, o periodicitate dinamică cu adevărat ritmată, corespunzătoare nu unei creşteri oarecare, ci creşterii perfect *omotetice,* aceasta pentru că orice pulsaţie în raport geometric poate fi privită ca dîra schematică a unei spirale logaritmice, curba ideală a creşterilor omotetice, „analogice". [15, p. 47—48 şi pl. XII].

— Nu te mai contrazic ! Ba chiar am să mai adaug şi cealaltă caracteristică a tăieturii de aur, aceea de a arăta că există o posibilitate de a măsura frumosul. La această tăietură de aur se gîndeau filosofii greci cînd afirmau că frumuseţea înseamnă „proporţie bine cumpănită". Şi, chiar dacă nu au numit-o „sectio aurea", ca Leonardo da Vinci, toate statuile antice, nu numai acelea din secolul lui Pericle, ci şi

de mai tîrziu, au fost sculptate ţinînd seama de această tăietură de aur. La fel şi Vitruviu spunea că „simetria decurge din proporţie — ceea ce numesc grecii *analogie* — consonanţa dintre fiecare parte din întreg. Leonardo da Vinci susţinea că tăietura de aur ar trebui să fie legea care să domine arhitectura, ca prin ea să se stabilească proporţiile dintre diferitele părţi ale unei clădiri, precum şi între volumul construit şi cel rămas liber, fiindcă numai respectarea acestui raport face ca un ansamblu arhitectonic să placă ochiului". În cartea lui Matila Ghyka : *Estetica şi teoria artelor* sînt menţionate numeroase măsurători care s-au efectuat în legătură cu „dimensiunile şi proporţiile templelor din Elada" din care reiese că, în frumuseţea şi armonia care o răspîndeşte Parthenonul, Propileele şi alte temple greceşti, intervine şi tăietura de aur. [17, p. 81].

— Ai dreptate. Arhitectura greacă prezintă un alt aspect al frumosului, aş putea spune, diametral opus aceluia pe care-l inspiră arhitectura egipteană, căci, dacă maiestatea piramidelor sau a Sfinxului ne aduce în minte gîndul morţii şi al eternităţii, arhitectura greacă palpită de viaţă. E de ajuns să privim Templul Athenei Niké, coloanele ei elegante şi armonioase care poartă un fronton în formă de triunghi isoscel, totul fiind calculat aşa ca să dea impresia de graţie şi eleganţă.

— Dar nici în statui, sculptorii greci nu au folosit modele vii pentru zeităţile lor, ci le-au realizat ţinînd seama de un anumit sistem de proporţii care aveau rostul să producă impresia de armonie a totului. Începînd din Renaştere şi pînă în ziua de azi, toţi artiştii au ţinut seama de această împărţire a segmentelor. Îţi mai amintesc numai de Kepler, astronomul, matematicianul şi, aş putea spune, esteticianul secolului al XVI-lea, fiindcă a scris, pe lîngă celelalte lucrări bine cunoscute, şi un tratat de estetică cu titlul : *Harmonices mundi* (Armonia lumii), în care se exprimă într-o formă cu totul originală despre tăietura de aur : „Această proporţie geometrică, cred eu, este o idee care rămîne singură veşnică pentru a releva crearea celui asemenea din cel asemenea !".

— Cred că înaintea lui Kepler şi-au spus părerea matematicienii din vechea Eladă. N-ai vrea să-i ascultăm pe ei mai întîi ?

— Ba da !

ACOLO UNDE MATEMATICA S-A ÎNFRĂȚIT CU FRUMOSUL

— Dacă ar fi vorba să aleg frumosul din matematica rămasă de la grecii antici, îți spun drept că nu știu ce ar trebui să las deoparte. Am impresia că filosofii greci, care erau și matematicieni, au țesut toate problemele de matematică cu fire desprinse din frumos, armonie sau încîntare. De pildă, teorema : „toate unghiurile înscrise într-un semicerc sînt drepte" pe care a stabilit-o și a demonstrat-o Tales, se spune că l-a impresionat așa de tare, încît a adus drept sacrificiu zeilor un bou. Și doar Tales nu era nici la prima lui descoperire științifică și nici un naiv, care să se lase prins în capcana orgoliului. Era unul dintre cei șapte înțelepți ai Greciei, călătorise prin Egipt și stîrnise mirarea Faraonului arătîndu-i că știa să măsoare înălțimea piramidei numai cu ajutorul umbrei pe care o lăsa ea. Și totuși, în această teoremă, care nu aduce nici un folos practic, el a văzut o frumusețe demnă de admirat, o frumusețe care l-a încîntat și pentru care a simțit nevoia să mulțumească acelora care considera el că-s stăpînii înțelepciunii.

— Dar această teoremă este și astăzi tot așa de frumoasă, deși trecem peste ea cu multă ușurință ! Faptul că e de ajuns să luăm oricare punct de pe semicerc și să-l unim cu extremitățile diametrului *ca să se formeze de la sine un unghi drept* te poate încînta ca și o melodie, sau o poezie, sau un tablou ! (fig. 11). La fel de remarcabilă este și admirația pitagoreicilor pentru *numărul în sine*, numărul *abstract* și lipsit de orice semnificație practică. Ca să-l izoleze de orice fel de aplicații i s-ar putea atribui în viața socială și economică, pitagoreicii întîi, și apoi ceilalți matematicieni greci, au născocit o nouă știință, numită *Aritmetica*, știință care să se ocupe *numai de proprietățile numerelor abstracte*, bineînțeles *întregi*, căci numai întregii erau priviți ca numere. Celelalte numere concrete, care puteau fi și fracționare sau chiar iraționale, erau considerate ca *mărimi* și calculele cu ele aparțineau altei științe, numită *logistica*, știință la îndemîna negustorilor, sclavilor și nebăgată în seamă de filosofi. Aritmetica nu avea nici un fel de aplicații practice, ea era studiată numai ca o delectare, iar Socrate o definește în *Harmide sau despre înțelepciune* drept : „știința a ceea ce este par și impar, a deosebirilor dintre numere și a relațiilor dintre ele".

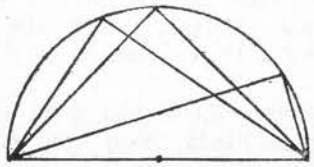


Fig. 11

— Așa-i. Pentru Pitagora, *Aritmetica* era cea mai frumoasă dintre științe și chiar cea mai avantajoasă, fiindcă numai în acest domeniu, „lucrurile apar sub formă de numere" !

— Parcă numai lui Pitagora *Aritmetica* îi apărea ca știința cea mai frumoasă ? Gauss nu a spus că *Matematica* este regina științelor, iar *Aritmetica* este regina matematicii ?

— Lui Gauss îi dădea mîna să o spuie, fiindcă avea știința gata plămădită de pitagoreici și de toți cei ce au urmat după ei timp de peste douăzeci de veacuri, pe cînd Pitagora frămînta chiar atunci armonia ce avea să farmece generațiile viitoare. Erau lucruri la care nu se gîndise nimeni mai înainte și pe care le înșira el atunci ca pe niște mărgele strălucitoare pe un fir de ață. Să ne gîndim numai la împărțirea numerelor în *prime* și *compuse*. Din punct de vedere practic această împărțire nu servește la nimic. Dar cîtă desfătare nu au creat aceste numere prin proprietățile lor în sufletele matematicienilor, începînd din vremea lui Pitagora și pînă azi ?

— Mă gîndesc, de pildă, la demonstrația pe care o dă Euclid, în Cartea a IX-a, despre infinitatea numerelor prime.

— Te-ai gîndit bine, căci această demonstrație a încîntat pe mulți matematicieni, de atunci și pînă în zilele noastre, și i-au îmbiat să mai adauge alte demonstrații noi. Ce-ar fi să luăm *Elementele* ca să citim, chiar de acolo, cum a formulat Euclid această descoperire a pitagoreicilor ?

— Nimic mai simplu, iată teorema 20, care spune : „Numerele prime sînt mai multe decît orice mulțime dată de numere prime". [16, p. 75]. La p. 246, Victor Marian transcrie demonstrația în notația noastră : „Fie 2, 3, 5, . . ., p seria numerelor prime cunoscute și să formăm produsul : $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . p) + 1$. Atunci e ușor să aflăm un nou număr prim, deoarece pe N nu-l împarte niciunul din numerele prime cunoscute, deci sau

1) $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1$ e un număr prim, sau

2) $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1$ nu este prim și atunci trebuie să-l împartă un număr prim $q \ldots$"

— Da, și astfel se demonstrează că numărul prim obținut este mai mare decît p. Tot Victor Marian arată mai departe că manualele moderne de algebră cuprind această demonstrație sau altele, ca, de pildă, acelea imaginate de L. Euler, A. Legendre, T. Cebîșev, I. Bertrand, J. Lagrange etc. ; astfel se dovedește că această teoremă este frumoasă și, prin aceasta, a atras atîția matematicieni în jurul ei !

— Mai înainte de a părăsi numerele prime, că dacă ne-am potrivi nu le-am părăsi nici pînă mîine, gîndul mă duce la *Ciurul lui Eratostene*. Nu s-ar putea spune că acest ciur nu este o *operă de artă !* Să-l urmărim, ca să ne încredințăm ! Mai întîi a căutat un pergament potrivit de mare ca să încapă toate numerele de la 1 la 1 000, l-a încadrat pe un tablou și a scris numerele, unele după altele, pe rînd. Lucrul acesta nu era deloc ușor, căci atunci nu exista sistemul zecimal, numerele fiind scrise cu ajutorul literelor din alfabetul grec care erau combinate după reguli bine stabilite. După ce a terminat această operație a urmat eliminarea numerelor care nu erau prime. Cum ? Știm de la Platon cum procedau pitagoreicii și desigur că așa a făcut și Eratostene. Mai întîi, începînd de la numărul 3 înainte a eliminat, prin găurire, toate numerele care erau divizibile cu doi, după aceea a mai scos din tablou, găurind cu mare atenție, toate numerele divizibile cu trei, cu cinci, cu șapte și așa mai departe. El a executat astfel, folosind un cuțitaș în loc de pensulă, un tablou de o mare frumusețe pentru cei ce-l puteau înțelege și aprecia, căci oferea ochiului, așa, dintr-o privire, toate numerele prime de la 1 la 1 000 !

— De altfel și azi se folosește aceeași metodă de a stabili dacă un număr este prim sau nu. Cu singura deosebire că

pentru noi *Ciurul lui Eratostene* s-a transformat într-o carte voluminoasă în care se găsesc toate numerele prime de la 1 la 10 000 000, calculele fiind făcute cu mașinile electronice de calcul. Dar dincolo de această limită, cel care ar fi curios să afle identitatea unui anume alt număr, trebuie să procedeze ca odinioară Eratostene ! Tot pitagoreicii, mînați de setea de frumos, au descoperit un vast domeniu de investigație, care pînă atunci părea să nu aibă, nici în clin, nici în mînecă, cu matematica.

— Te gîndești desigur la muzică ? La trainica legătură stabilită întîia oară de Pitagora între ea și matematică ? În decursul Evului Mediu, muzica a fost considerată ca o știință matematică și a făcut parte din obiectele *Quadrivium*-ului, care erau : aritmetica, muzica, geometria și astronomia. Aș fi bucuros să ne oprim asupra acestui subiect.

— Povestea spune că Pitagora trecea zilnic pe o ulicioară unde se afla atelierul unui potcovar și astfel auzea sunetele pe care le scoteau ciocanele izbite de nicovală. Într-o zi, cînd a avut impresia că acele sunete se succed în ritm de *cvarte, cvinte* și *octave*, a intrat, de curiozitate, în curtea potcovarului și a văzut patru sclavi care loveau pe rînd în nicovală, fiecare avînd însă cîte un ciocan de altă greutate decît a celorlalți. Această constatare i-a dat ideea să cerceteze mai îndeaproape fenomenul de producere a sunetelor, încredințat fiind că acesta ar putea fi exprimat prin numere. Experiențele le-a început urmărind vibrațiile produse de o coardă bine întinsă și fixată la o extremitate. El a descoperit că există, în adevăr, un raport bine determinat între lungimea unei coarde bine întinse care vibrează și înălțimea sunetului pe care-l produce.

— Mai amănunțit, Pitagora a procedat astfel : A fixat o coardă de o lungime cunoscută la o extremitate, apoi a întins-o bine și după ce a fixat-o la cealaltă extremitate a făcut-o să vibreze, reținînd sunetul pe care-l scotea. Apoi a repetat experiența, reducînd lungimea coardei la jumătate. A constatat că sunetul, sau nota pe care a obținut-o, se acorda cu prima, dar era cu o octavă mai sus. Continuînd să varieze lungimea inițială a coardei, a mai găsit alte două

note agreabile auzului, adică *consonante* și anume la $\frac{2}{3}$ din lungimea inițială *cvinta* și la $\frac{3}{4}$ din lungimea coardei, *cvarta*.

— Exact. Pitagora a stabilit astfel că se produc note muzicale consonante, sau armonioase, atunci cînd lungimile unei coarde care vibrează sînt în rapoartele $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ față de coarda întreagă. Cu ajutorul acestor note, Pitagora a construit *gama diatonică*, numită și gama lui Pitagora, și a formulat prima teorie matematică despre armonia muzicală.

— Faptul că natura *intrinsecă a sunetelor* și deci *esența armoniei muzicale* se putea exprima prin raportul dintre două numere întregi, a întărit pe pitagoreici în credința că „tot ce se poate cunoaște este număr că fără de număr nu-i posibil să cuprinzi ceva cu gîndul sau să recunoști" cum scria, la vreun veac după moartea lui Pitagora, unul dintre discipolii lui, într-o lucrare din care s-au păstrat cîteva fragmente.

— De altfel, într-o scrisoare a lui Leibniz către Goldbach regăsim părerea că muzica este aritmetică exprimată într-o formă subtilă : „Muzica este un exercițiu de aritmetică tainică și cel ce i se consacră nu știe că mînuiește numere".

— Descoperirea proprietăților muzicale ale acestor rapoarte numerice i-au făcut pe pitagoreici să se ocupe mai îndeaproape și de proprietățile rapoartelor numerice, deși, după cum am spus, aceste *rapoarte* nu erau privite de ei ca *numere*, ci numai ca *mărimi* ce se exprimă prin numere. (21). Comparînd rapoartele între ele au ajuns la noțiunea de *egalitate a două rapoarte*, adică la *proporție*, numită de greci *analogon*, cuvînt cu înțeles de „să aibă același raport" (din care s-a format și termenul *analogie*, cu înțeles de *potrivire*, *concordanță*, între două relații date). Printre proporțiile normale : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o atenție deosebită a fost dată acelora în care, în loc de patru numere deosebite : a, b, c, d, apăreau numai trei : a, b, c, de unde se impunea ca numărul b situat între a și c să aibă o *valoare medie* între numerele a și c.

Această valoare medie nu se putea însă determina *în mod unic*, cînd se dădeau numerele a și c și din această cauză pitagoreicii au definit *mai multe medii*, *diferite unele de altele*, prin condiția suplimentară ce se impunea numerelor a și c. Dintre aceste medii, ei au dat o atenție deosebită următoarelor trei :

Media aritmetică : definită de proporția : $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$,

din care rezultă

$$b_A = \frac{a+c}{2}.$$

Media geometrică : definită pe proporția : $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$,

din care rezultă : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ sau $b_G = \sqrt{ac}$. Ea se mai numește și *medie proporțională*.

Media armonică : definită de proporția : $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, din care rezultă [22] :

$$b_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c} \quad (22)$$

— Denumirea de *medie armonică* se explică prin faptul că această medie este strîns legată de legile *consonanței muzicale*, anume cvinta unui sunet apare ca medie armonică dintre sunetul considerat și octava lui.

— În adevăr, putem verifica, notînd cu 1, lungimea coardei corespunzătoare unei note și cu $\frac{1}{2}$ aceea corespunzătoare octavei. Media armonică dintre aceste două mărimi este :

$$M_H = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$ așadar cvinta sunetului dat,

— Fiindcă am vorbit de media armonică nu putem trece sub tăcere nici *proporția muzicală* numită de Pitagora și *proporția perfectă*, proporție pe care unii istorici o consideră de origine babiloneană. Considerînd numerele a, b, c, unde b este valoarea lor medie, *proporția perfectă* este formată din cele trei medii considerate anterior, media geometrică fiind media proporțională între celelalte două. Avem deci :

$$\frac{b_A}{b_G} = \frac{b_G}{b_H} \text{ de unde : } b_H = \frac{b_G^2}{b_A} \text{ sau } \frac{2ac}{a+c} = \frac{ac}{\frac{a+c}{2}}$$

De aici rezultă că *media armonică* dintre două numere a și c se obține împărțind pătratul *mediei geometrice* (ac) prin *media aritmetică* $\left(\frac{a+c}{2}\right)$.

Această proporție, o adevărată bijuterie, a fost numită și *proporție muzicală*, fiindcă ea leagă, într-un mod surprinzător, cele patru intervale care despart sunetele fundamentale din gama lui Pitagora. În adevăr, considerînd $a=1$, $c=\frac{1}{2}$ și introducîndu-le în proporția perfectă, celelalte două intervale fundamentale, corespunzătoare cvartei și cvintei, apar de la sine căci proporția :

(1) $$\frac{2ac}{a+c} = \frac{ac}{\frac{a+c}{2}} \text{ devine } \frac{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1\cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \text{ adică } \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}}$$

— Și acum rezumînd, cele cuprinse în proporția muzicală (1) arată că notele care plac, adică consonante, sînt formate din rapoartele dintre numerele întregi 1, 2, 3 și 4, anume : tonul sau *unisonul* (1), octava lui $\left(\frac{1}{2}\right)$, cvinta lui $\left(\frac{2}{3}\right)$ și cvarta lui $\left(\frac{3}{4}\right)$. Mai mult decît atît, relația dintre distanțele ce separă aceste note muzicale aflate în consonanță arată că împărțirea coardei inițiale trebuie făcută în *părți neegale*. Căci dacă cele două intervale corespunzătoare cvintei și cvartei ar fi egale $\left(\frac{x}{y}\right)$, atunci din proporția muzicală (1) rezultă : $1\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ sau $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$. În acest caz, împărțirea coardei nu se mai face printr-un raport de numere întregi și rezultatul obținut nu mai este consonanță, ci *disonanță*, adică lipsă de armonie. Cît privește numărul $\sqrt{2}$, despre acesta vom discuta altădată, fiindcă, noi n-am atins încă multe dintre acele proprietăți ale numerelor întregi care i-au încîntat mai întîi pe pitagoreici și apoi pe atîția alții, veacuri de-a rîndul.

— Foarte frumoasă, și, bineînțeles, complet gratuită, este și problema *numerelor figurate*, cu care se pare că ei se delectau încă de prin veacul al VI-lea î.e.n.

— Da, căutau pietricele de formă rotundă sau pătrată, toate cam de aceeași mărime și se îndeletniceau să formeze cu ele diferite poligoane regulate, ba chiar și poliedre. Așa am constatat că existau relații perfect definite și specifice între numărul pietricelelor care compuneau o anumită figură și figura respectivă. Din cauza aceasta, ei au numit acele numere, *numere figurate*. Vrei să ne oprim asupra lor ?

— Mai încape vorbă ? Începem cu *numerele triunghiulare*. Primul număr era 1. Lui i se adăugau două pietricele și astfel apăreau cele trei vîrfuri ale triunghiului echilateral. Din acesta se putea forma altul, tot echilateral, dacă se adăugau la una dintre laturile lui, considerată ca bază, alte trei pietricele. Procedeul se putea continua la infinit, adică se putea obține un șir nesfîrșit de numere triunghiulare, în care legea de formare era bine stabilită. Trebuia doar ca ea să poată fi formulată într-un mod simplu, care să permită să găsești oricare număr triunghiular, fără să trebuiască să construiești pe rînd toate triunghiurile ce se află înaintea lui. Iată-le : (fig. 12).

— Mai întîi trebuie notate operațiile succesive :

$$1\ ;\ 1+2=3\ ;\ 1+2+3=6\ ;\ 1+2+3+4=10\ ;$$

$$\ldots\ldots\ 1+2+3+4+\ \ldots\ +n=N.$$

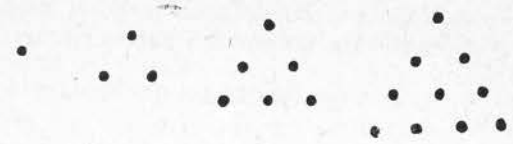


Fig. 12

— Această formă de exprimare nu ne spune însă nimic, căci dacă ar fi să aflu cît de mare este al 1 279-lea număr triunghiular, ar trebui să calculez suma celor 1 279 numere, ceea ce ar fi cam „albastru" !

— Așa-i și tocmai aici se vădește frumusețea problemei. Pitagora a observat că numerele triunghiulare se formează prin adunarea numerelor naturale, scrise unele după altele, ceea ce înseamnă că ele reprezintă sumele unor progresii aritmetice cu rația 1. Totul se reducea deci la găsirea unei formule care să stabilească această sumă în funcție de numărul termenilor, și el a găsit-o :

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

În felul acesta, în locul sumelor pe care le-am scris mai înainte, voi pune : $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, $3=\frac{2\cdot 3}{2}$, $6=\frac{3\cdot 4}{2}$, ...,

$$\ldots, N=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Nostim este și faptul că, scrise sub această formă, numerele triunghiulare reprezintă chiar *aria unui triunghi*, baza și înălțimea fiind două numere consecutive.

— Îți aduci aminte de povestea cu Pitagora și numerele triunghiulare ?

— S-ar putea să o fi uitat ? Mi-ai spus-o mata, demult, cînd tîlcul ei mai rămăsese încă ascuns pentru mine. De aceea, dă-mi voie să ți-o spun eu, ca apoi să adaug, pentru lămurire, și comentariul ce l-am citit în cartea lui Matila Ghyka : „Cunoscînd faima lui Pitagora, se spune că un negustor bogat și dornic de învățătură mai înaltă a venit la el și l-a rugat să-l primească printre elevii lui, ca să-l învețe filosofia. — Bine, i-a zis Pitagora, am să te-nvăț să numeri. Dezamăgit, negustorul i-a răspuns : — Asta o știu eu foarte bine, încă din copilărie ! Pitagora a zîmbit și i-a spus : — Să te aud, numără ! Și negustorul a început : unu, doi, trei, patru. La patru, Pitagora i-a făcut semn să se oprească, zicîndu-i : „Ceea ce crezi tu că este *patru* înseamnă zece, e un triunghi perfect și simbolul nostru !" Și fiindcă povestea nu spune ce s-a întîmplat mai departe, vreau să-ți arăt ceea ce înțeleg acum din povestea aceasta și nu o știam prea bine pînă ce nu am citit-o în cartea despre care am amintit. Seria primelor patru numere : 1, 2, 3, 4 avea pentru Pitagora o însemnătate deosebită, mai întîi pentru că prin *suma lor* se exprima *decada* (1+2+3+4=10) și, totodată, *al patrulea număr este triunghiular.* De aceea, el a numit această serie „tetractis" și i-a atribuit calitățile *decadei* (numărul simbolic al Universului), precum și pe acelea ale creșterii triunghiulare. În plus, tot aceste patru numere i-au permis lui Pitagora să stabilească și acordurile muzicale esențiale. Aceasta l-a făcut pe Pitagora să considere *Tetractisul* identic cu *Armonia.* O știm de la Jamblicos care citează, în *Comentariul* său, acest vers atribuit lui Aristotel : „Tetractis, armonie pură, aceea a Sirenelor." Tot Jamblicos menționează și jurămîntul pitagoreicilor de a nu divulga secretele confreriei, jurămînt în care apărea și cuvîntul *tetractis :* „Nu, jur pe cel ce-a transmis sufletului nostru tetractisul în care se găsește izvorul și rădăcina naturii eterne". [17, p. 36—48]. Dar, mai sînt și alte șiruri de numere, în afară de cele triunghiulare, care i-au uimit pe pitagoreici prin proprietăților lor neașteptate. De pildă, numerele pătrate. Cum le formau, pornind de la o singură pietricică ?

— Adăugîndu-i una alături de ea și apoi alte două pe un rînd paralel și orizontal, așadar în total alte 3 pietricele. Apoi continuau, transformînd pătratul într-un dreptunghi, punîndu-i la marginea din dreapta 2 pietricele și adăugînd apoi pe latura orizontală de sus alte trei, în total 5 pietricele (fig. 13) și așa mai departe [23].

— Așadar, numerele pătrate se exprimă prin șirul nesfîrșit al sumelor succesive de numere impare, cu alte cuvinte sînt tot sume de progresii aritmetice, dar cu rația 2. Vom scrie deci șirul de numere pătrate astfel :

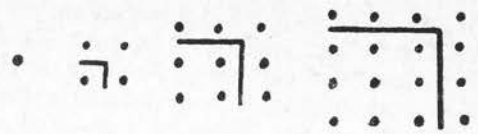


Fig. 13

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+5=9,\ \ldots.$$

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)\,n}{2}=n^2\,.$$

— De aceea, numerelor ridicate la puterea a doua li se spune pînă azi *pătrate : pătratul lui 3 este 9* sau *rădăcina pătrată a lui 9* este 3 ! Numai de la numerele triunghiulare nu ne-a mai rămas ca amintire decît numirea lor cu iz de geometrie !

— Nici de la cele pătrate nu s-a păstrat întocmai formularea de atunci, ci s-a mai modernizat oarecum, fiindcă în loc de *rădăcina pătrată* Grecii spuneau *latură*, aşadar, dacă spuneau : „pătratul lui 5 este 25", în schimb, în loc de *rădăcina pătrată a lui 25 este 5* ei spuneau : *pătratul 25 are ca latură 5*.

— Iată şi o frumoasă teoremă, pe care au stabilit-o pitagoreicii, privind figurile corespunzătoare acestor numere: „Orice număr pătrat este suma a două numere triunghiulare succesive". Să figurăm, de pildă, pătratul numărului 4 (fig. 14) şi să-l tăiem în două printr-o diagonală. El se desface astfel în două numere triunghiulare, unul cu baza 4 şi celălalt cu baza 3, adică 16=6+10. Cazul general rezultă din identitatea evidentă :

$$\frac{n\,(n-1)}{2}+\frac{n\,(n+1)}{2}=n^2\,.$$

— Dacă pătratele apar ca sumele succesive ale numerelor impare, *numerele dreptunghiulare* se exprimă prin sumele succesive ale numerelor pare. Ca să le construiască, pitagoreicii porneau de la două pietricele şi apoi adăugau altele ca să formeze şirul de dreptunghiuri : pe cele două la completau cu alte două, puse pe un rînd paralel ori-

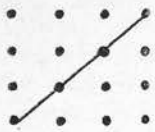


Fig. 14

Fig. 15

zontal şi formau un pătrat, care-l prefăceau în dreptunghi cu alte două pietricele aşezate vertical la dreapta. Pentru numărul următor transformau iar dreptunghiul într-un pătrat de latură 3, prin alte 3 pietricele puse vertical îl prefăceau într-un nou dreptunghi şi aşa mai departe (fig. 15).

Expresiile lor numerice se află, tot ca sume de progresii aritmetice cu raţia 2, anume

$$2,\qquad 2+4=6\ ;\ 2+4+6=12,\ \ldots$$

$$\ldots,\ 2+4+6+\ldots+2n=\frac{(2+2n)\cdot n}{2}=n\,(n+1).$$

Formula generală ne arată că şi numerele dreptunghiulare se pot scrie ca produsul dintre două numere consecutive : $2=1\cdot 2$; $6=2\cdot 3$; $12=3\cdot 4$ etc., produse care dau aria unui dreptunghi. Aceste numere sînt amintite şi de Euclid în *Elemente*, dar le numeşte *numere plane* şi nu *dreptunghiulare*, aşa cum le spuneau pitagoreicii, ca să le deosebească de celelalte *numere plane*.

— Cu privire la metoda de a fi construite, Nicomah din Gherasa, în cartea lui de *Aritmetică*, face această nostimă observaţie : „Dacă un pătrat primeşte propria lui latură, el devine dreptunghi, adică, pe Zeus, este deposedat prin propria lui latură" (de calitatea lui de pătrat) ! Noi o spunem simbolic : $n^2+n=n\,(n+1)$.

— Pitagoreicii au mai stabilit formulele care caracterizează şi numerele *pentagonale, hexagonale* etc. Cu asemenea jucării s-au amuzat secole întregi matematicienii greci. O dovedeşte şi Hipsicle din Alexandria, care a trăit cam prin secolul al II-lea î.e.n., prin metoda găsită de el ca să deducă orice număr poligonal, pornind de la reunirea mai multor numere triunghiulare. Notînd cu p numărul laturilor

poligonului respectiv, el a arătat că *al n-lea număr poligonal* de această speță este dat de formula :

$$N_p = \frac{1}{2} n \cdot [2 + (n-1)(p-2)].$$

— Dar această formulă generalizează pe aceea de descompunere a unui număr pătrat în două numere triunghiulare !

— Exact, și tot prin generalizare, pitagoreicii au trecut de la numerele plane la numerele solide, adică la acelea în care pietricelele erau așezate în așa fel ca să formeze un poliedru ; piramidă, cub etc. De pildă, numerele *tetraedrale* sînt sume succesive ale numerelor triunghiulare :

$$1, \quad 1+3=4, \quad 1+3+6=10, \quad 1+3+6+10=20...$$

$$1+3+6+...+\frac{n(n+1)}{2} = N, \text{ unde } N = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

reprezintă tocmai formula volumului piramidei.

— Și *numerele cubice* au o lege de formare interesantă, căci ele apar, prin suprapunere, în pături succesive ale pătratelor, așa după cum în cazul tetraedrului au fost suprapuse triunghiuri. (fig. 16).

Formula care corespunde la aceste numere-cub apare din construcție :

$$1.2\ (1+3) = 8 = 2^3,\ 3\ (1+3+5) = 27 = 3^3, ...$$

$$...n\,[1+3+5+...+(2n-1)] = n^3.$$

Ea reprezintă numărul pietricelelor de pe o muchie a cubului ridicat la puterea a treia și de aici numirea de cub rămasă numerelor de această formă.

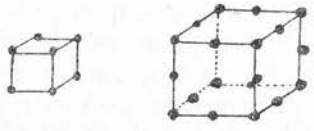


Fig. 16

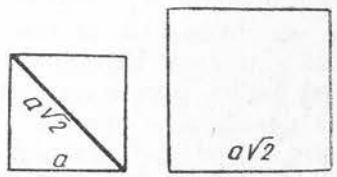


Fig. 17

— Problema aceasta a numerelor figurate are ceva din frumusețea trandafirului ; te desfată cu parfumul, dar te și sîngerează cu ghimpiii lui, iar pitagoreicii întîi, și după ei ceilalți matematicieni greci, au simțit din plin acești ghimpi.

— Te gîndești la numerele iraționale și la soarta bietului Hippasus din Metapont, care n-a putut păstra secretul existenței lor ?

— Desigur, poveștile lui Jamblicos sînt pline de farmec, dar le-am descusut noi îndeajuns ca să nu ne mai oprim acum la ele. Prefer să punem direct problema, așa cum a pus-o Platon : „Să se găsească latura pătratului cu aria de două ori cît a unui pătrat de latură 1". Pătratul care are aria de două ori mai mare decît al celui dat era ușor de construit cu rigla și compasul, căci latura lui este tocmai diagonala primului pătrat (fig. 17), dar ca să spui cît de mare-i această latură, nu era posibil, fiindcă mărimea ei nu se putea exprima *nici printr-un număr întreg și nici cu unul fracționar*, iar altfel de numere nu erau admise ! O spusese clar de tot respectatul pitagoreic Philolaos din Tarent : „Tot ce poate fi cunoscut are număr !", *număr* fiind numai numărul întreg sau raportul dintre două numere întregi. Și totuși, iată că apare o latură, *care poate fi cunoscută*, fiindcă se poate construi cu rigla și compasul, și totuși *nu are număr !* Descoperirea a fost făcută chiar de pitagoreici și degeaba au căutat ei să ascundă teribilul adevăr, el a străbătut ca fulgerul și devenise așa de obligatoriu să-l cunoști, încît pe vremea lui Platon se spunea : „Cine nu știe că diagonala unui pătrat este incomensurabilă cu latura lui, nu-i demn de numele de om". Aristotel a arătat că demonstrația acestui adevăr se bazează pe ipoteza că parul nu-i egal cu imparul.

— Deși am discutat-o de nu știu cîte ori această demonstrație îmi face plăcere să o repet căci e frumoasă. Simt aceeași plăcere ca atunci cînd recit anumite versuri care le știu din tinerețe. Vrei să o repetăm ?

— Cum să nu vreau : să presupunem că $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, unde a și b sînt numere întregi, iar fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. Ridicînd la pătrat avem $2b^2 = a^2$. Așadar, a trebuie să fie

un număr par ; are deci forma $a=2c$ și $a^2=4c^2$. Înlocuind, obținem : $b^2=2c^2$, or, asta nu se mai poate, fiindcă am presupus că a și b sînt prime între ele, fracția fiind ireductibilă.

— Cu această mărime „irațională", $\sqrt{2}$, denumită așa tocmai ca să se arate că ea nu se încadra printre mărimile „ce aveau un sens, adică erau raționale", pitagoreicii se mai întîlniseră și cînd au cercetat mai îndeaproape legile consonanței muzicale. Nu știu care să fi fost prima lor întîlnire, dar odată recunoscută existența ei, am putea presupune că aproape se împăcaseră cu această pacoste, dat fiind că segmentul ca atare putea fi construit cu rigla și compasul. Iată cît de cuminte relatează Euclid acest fapt în teorema 11 din Cartea a VIII-a : „Între două numere pătrate există un număr mediu proporțional și pătratul are către pătrat un raport egal cu pătratul raportului laturii către latură". [24].

— E adevărat, afirmînd existența unui număr mediu proporțional rezultă că el se poate construi cu rigla și compasul, ca orice medie proporțională. Să traducem aceasta în formulă, fiindcă știu că vom avea nevoie de ea : „Fie a și b cele două numere pătrate, iar c și d laturile lor respective. Avem $a=c^2$ și $b=d^2$. Prin înmulțire membru cu membru rezultă : $ab=c^2d^2$ sau, sub formă de proporție, $\frac{a}{cd}=\frac{cd}{b}$. Pentru $a=c=1$ și $b=2$ rezultă $d=\sqrt{2}$.

— Lucrurile au început să ia o întorsătură neașteptată și, aș spune, chiar dezastruoasă, de îndată ce pitagoreicii au avut fantezia să generalizeze problema, aplicînd-o la cuburi, adică la numerele solide.

— Vrei să spui, atunci cînd s-a pus problema dublării cubului ?

— Da. Anume cînd au vrut să găsească latura cubului al cărui volum este de două ori mai mare decît al unui cub dat. Analitic, problema, este simplă : din $b^3=2a^3$ rezultă $b=a\sqrt[3]{2}$. Complicat era faptul că atunci grecii nu aveau la îndemînă *această unealtă analitică*, și care ne scoate pe noi din atîtea încurcături !

— Însă Hipocrate din Chios a dat o soluție superbă, ghidîndu-se după cazul rezolvat în plan. El și-a spus : cînd se dă un dreptunghi cu laturile a și b, ca să-l transform în pătrat trebuie căutată *media geometrică* dintre a și b, or, notînd-o cu x, avem $\frac{b}{x}=\frac{x}{a}$ sau $x^2=ab$. În cazul dublării cubului de latură a, ne aflăm în fața unei relații de forma $2a^3=a^2\cdot 2a=b^3$, rezolvarea ei conduce la găsirea a *două medii geometrice* în *proporție continuă*. Anume, introducînd un segment intermediar, x, astfel ca să se poată scrie cele două medii geometrice, avem : $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}=\frac{x}{2a}$. De aici rezultă $x=\frac{b^2}{a}$ și înlocuind $\frac{a}{b}=\frac{b^2}{2a^2}$ sau $b^3=2a^3$.

— Soluția este cu adevărat superbă și ingenioasă numai că, dacă latura pătratului de arie dublă se putea construi cu rigla și compasul, la latura cubului de volum dublu, aceste două instrumente nu mai folosesc la nimic ! Și de aici a început dezastrul !

— E adevărat, căci nimeni nu putea înțelege de ce este imposibil să se construiască latura cubului cu rigla și compasul cînd problema prezenta atîta asemănare cu cea din plan ? Pînă în secolul al XVII-lea nu se știa că o construcție cu rigla și compasul se traduce algebric prin ecuații de gradul întîi și doi. De-abia Descartes și Fermat au stabilit că cercul se exprimă printr-o ecuație de gradul al doilea, și *aceasta de un anumit tip*, așa că orice problemă care conducea la o ecuație de un grad mai mare decît doi, cum e în cazul dublării cubului, sau la alt gen de ecuații decît acela care corespunde dreptei și cercului, era imposibil să accepte o soluție prin metoda clasică, a riglei și compasului !

— Problema aceasta l-a preocupat și pe Platon, care cunoștea soluția lui Hipocrate. La ea face aluzie în *Timeu* cînd spune : „În timp ce o singură medie ajunge pentru a lega două numere a și b, pentru a lega două numere solide trebuie două medii". El a cerut prietenului său Arhitas din Tarent să rezolve efectiv problema, ținînd seama de rezultatul teoretic al lui Hipocrate și acesta a găsit o soluție, folosind intersecția a trei suprafețe de rotație : un cilindru

drept, un semitor și un con circular drept. Se pare că el a inventat chiar un aparat numit *mezograf*, care i-a permis să deseneze curbele de intersecție din care să deducă latura cubului. Desigur că soluția lui nu i-a plăcut nici lui Platon și nici celorlalți geometri, fiind considerată ca o soluție mecanică și nicidecum geometrică ! După el au mai încercat încă mulți alții să rezolve problema. De pildă, Menechmus a folosit intersecția dintre două conice și cu ajutorul lor a stabilit două metode diferite ; o dată a găsit latura cubului dublu ca segmentul de intersecție dintre două parabole, a doua oară ca segmentul de intersecție dintre o parabolă și o hiperbolă. Soluții admirabile, dar privite cu aceeași lipsă de considerație ca și aceea propusă de Arhitas și ca multe altele care își bazau rezultatul pe tot felul de curbe ce nu se puteau construi cu rigla și compasul !

— Cred că de aceea, adică din cauza imposibilității de a fi rezolvată cum doreau ei, grecii au legat de această problemă și o legendă, aceea a *Oracolului din insula Delos*, fapt care face ca problema să poarte și numele de „delică".

— Frumoasă legendă și frumoase timpuri acelea cînd zeii îi sfătuiau pe atenieni „să cultive mai mult geometria" !

— Așa-i. Bîntuind ciuma, atenienii s-au dus în insula Delos să-l întrebe pe Apollo ce să facă pentru ca să înceteze molima și însuși Apollo le-a răspuns că el dorește să i se dubleze altarul de jertfă, care avea forma unui cub. Nimic mai simplu, și-au spus bucuroși atenienii și îndată au făcut un altar cu muchia de două ori mai mare. Numai că după ce altarul a fost gata ciuma nu a încetat. Atunci bieții oameni s-au dus să-i ceară socoteală zeului. Iar zeul nu s-a supărat de îndrăzneala lor ci, i-a privit cu îngăduință arătîndu-le că nu știu destulă geometrie, ca să-și permită să stea de vorbă cu el ! Așa au înțeles atenienii că altarul lor era de opt ori, nu de două ori mai mare, și ca să respecte dorința lui Apollo, trebuiau să ceară ajutorul geometrilor.

— Iar aceștia nu i-au putut ajuta !

— Problema dublării cubului este numai una dintre cele trei *probleme celebre* din istoria matematicilor grecești, care ne-au fost transmise nouă, ca să le rezolvăm, folosind numai rigla și compasul ; celelalte două sînt : *problema trisecției unghiului*, în care se cere să se împartă un unghi în

trei părți egale și, *problema cuadraturii cercului*, în care se cere să se construiască latura pătratului de arie egală cu a unui cerc dat.

— Problema trisecției unghiului a amăgit și ea pe matematicenii greci din cauză că rigla și compasul erau suficiente ca să împartă un unghi în două părți gale și, prin urmare în 4, 8 și orice putere a lui 2. Dar trisecția unghiului înseamnă altceva, fiindcă formula trigonometrică prin care se exprimă relația dintre cosinusul unui unghi și cosinusul treimii lui conduce la o ecuație de gradul al treilea și nu de gradul al doilea, ca în cazul împărțirii unui unghi în două părți egale. [25]. Iar în cazul cuadraturii cercului, problema este așa de perfidă încît și azi, după ce Lindemann a demonstrat în mod riguros, în 1882, că în această problemă este imposibil să se folosească rigla și compasul, se găsesc zeci de *cuadraturiști* care susțin că au găsit soluția ei !

— În acest caz, există și o explicație *mai puțin dezinteresată*. Au circulat multe zvonuri, uneori adevărate alteori fanteziste, că s-ar fi pus premii destul de mari pentru cine ar găsi soluția.

— Chiar dacă ar fi așa, ce arată asta dacă nu că problema a sedus pe toți, pe acei care au propus premiul și pe acei care urmăresc să-l obțină ! Nici o problemă n-a stîrnit atîta patimă în afară poate de *perpetuum mobile* în fizică... Dar cuadratura nu poate fi soluționată *niciodată*, fiindcă **numărul** π nu este un număr *algebric*, ci *transcendent !*

— Ce frumoasă problemă este și aceasta, a numerelor transcendente ! Liouville, Hermite, Hilbert, Gordon, Hurwitz, Lindemann, toți acești mari matematicieni și mulți alții, au fost niște poeți care au compus teoremele lor dedicate numerelor transcendente cu aceeași adîncă vibrație sufletească, cu aceeași stare afectivă cu care alții au scris poeme. Și pentru ei au fost valabile versurile lui Eminescu :

„Mă cufund ca într-o mare de visări dulci și senine,
Și în jur parcă-mi colindă dulci și mîndre primăveri".

— Aici ai dreptate, în teoremele acelea nici umbră de preocupări din alte domenii sau de altă natură decît numai referitor la numerele transcendente în sine... noțiune nouă, zămislită în veacul al XIX-lea, deși rădăcina ei este

tot în şcoala lui Pitagora, la care aş vrea să ne mai întoarcem, ca să atacăm şi problema poliedrelor regulate.

— De ce la Pitagora şi nu la Platon ? Corpurile se chemau platonice pentru că Platon vorbeşte despre ele în *Timeu*, descriindu-le şi arătînd că nu-s mai multe decît cinci.

— Asta a fost valabil pînă cînd istoria matematicilor a arătat cum stau lucrurile. Dar prin cele ce ţi-am spus nu am intenţionat să scad meritul lui Platon, fiindcă e drept că el a atras mai *întîi* atenţia asupra lor şi, poate că la îndemnul lui, Teetet a stabilit cum se construiesc şi mai ales cum se poate dovedi că nu există mai mult decît cinci poliedre regulate.

— Iată un fapt care a uimit nespus de mult pe geometrii Eladei, care-şi ziceau : — De ce poliedrele regulate se limitează la cinci, pe cînd numărul poligoanelor regulate este nesfîrşit ? Oare nu tocmai ca să pună în evidenţă cît de mare era interesul pentru această întrebare, Euclid încheie ultima sa Carte, a XIII-a din *Elemente* [26] cu demonstraţia acestei teoreme ?

— Aşa cred şi eu, de aceea chiar propun să o citim, uite-o aici, la p. 109, din vol. III al *Elementelor* traduse de V. Marian : „Mai zic că, în afară de cele cinci figuri menţionate nu se poate construi nici o altă figură cuprinsă de poligoane echilaterale şi echiunghe egale între ele. Căci cu două triunghiuri sau oricare alte figuri plane nu se poate construi un unghi solid. Dar cu trei triunghiuri se poate construi unghiul piramidei, cu patru al octaedrului, cu cinci al icosaedrului, dar cu şase triunghiuri echilaterale şi echiunghe reunite într-un punct nu se va forma un unghi solid : căci unghiul triunghiului echilateral fiind două treimi dintr-un unghi drept, şase vor fi egale cu patru unghiuri drepte : ceea ce nu se poate, căci orice unghi solid e cuprins de unghiuri a căror sumă e mai mică decît patru unghiuri drepte. Din aceeaşi cauză, un unghi solid nu se va putea construi cu mai mult de şase unghiuri plane. Dar unghiul cubului e cuprins de trei pătrate ; dar nu poate fi cuprins de patru, căci iarăşi ar fi patru unghiuri drepte. Dar unghiul dodecaedrului e cuprins de trei pentagoane echilaterale şi echiunghe : dar nu poate fi cuprins de patru, căci unghiul pentagonului echilateral, fiind un unghi drept şi o cincime, cele patru unghiuri vor fi mai mari decît patru unghiuri drepte, ceea ce nu se poate. Din

aceeaşi cauză, un unghi solid nu poate fi cuprins de alte figuri poligonale. Aşadar, în afară de cele cinci figuri menţionate nu se poate construi o altă figură cuprinsă de poligoane regulate, ceea ce trebuia demonstrat".

— Simplă şi frumoasă demonstraţie, care-mi face plăcere să o ascult, „deşi o ştiu pe dinafară". Frumoasă şi neaşteptată apare încă şi teorema lui Euler, sau, mai bine zis, *Descartes—Euler*, care leagă între ele printr-o lege implacabilă numărul feţelor (F), al vîrfurilor (V) şi al muchiilor (M) ale acestor poligoane regulate : $F+V=M+2$! Dar, hai să le luăm la rînd :

Tetraedrul (fig. 18) are patru feţe în formă de triun-

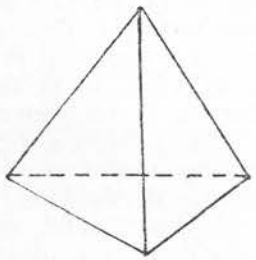


Fig. 18

ghiuri echilaterale, patru vîrfuri în care se întîlnesc cîte trei feţe şi şase muchii. Prin forma lui plină de armonie el a fost folosit mult în arta decorativă şi în arhitectură. Filosofii greci au făcut din el simbolul elementelor primordiale ale *substanţei* din care considerau ei că-i format universul : focul, aerul, pămîntul şi apa. [27]

— Ba, prin faptul că vîrful era îndreptat în sus ca o flacără, el era privit şi ca *simbolul focului*, adică a unuia dintre elementele esenţiale ale Cosmosului.

— Tot aşa după cum *cubul*, care dă impresia de soliditate şi de stabilitate, era considerat ca *simbolul pămîntului*. El este format din şase pătrate care se taie după opt vîrfuri, în fiecare dintre ele întîlnindu-se cîte trei feţe şi, aşa cum arată formula lui *Descartes—Euler* : $6F+8V=12M+2$, cubul are douăsprezece muchii (fig. 19).

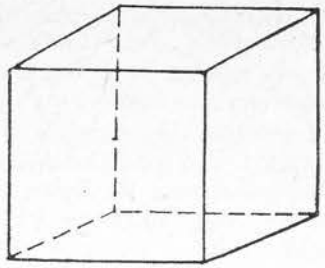


Fig. 19

— *Octaedrul* are, după cum arată numele, opt fețe, triunghiuri echilaterale. În fiecare vîrf se întîlnesc cîte patru fețe (fig. 20), are șase vîrfuri și douăsprezece muchii. Susținut de un vîrf, pare că-i gata să-și ia zborul și de aceea, probabil, pitagoreicii au văzut în el imaginea aerului care ne înconjoară. În fine, ca să completez cu asocierea stabilită de pitagoreici, între poliedrele regulate și elementele primordiale am să consider acum *icosaedrul*, poliedrul cu cele mai multe fețe, în număr de douăzeci. Ele sînt triunghiuri echilaterale, și, cum a arătat Euclid, se întîlnesc cîte cinci în fiecare vîrf, care sînt de toate douăsprezece. Dacă socotim după formulă, $20F+12V-2=30M$ găsim că muchiile lui sînt în număr de treizeci! Nu știu prin ce anume calitate a lui el a inspirat imaginea apei, dar el simbolizează apa (fig. 21).

— Acum, ca seria *figurilor cosmice* să fie completă, ne rămîne să mai vorbim și de *dodecaedru*, considerat ca

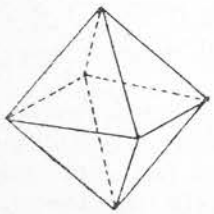


Fig. 20

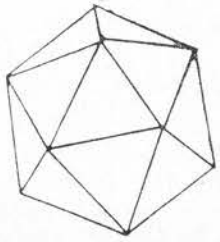


Fig. 21

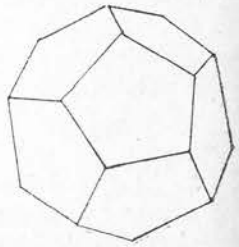


Fig. 22

simbolul Universului sau *cvintesența*, fiindcă el se apropie cel mai mult de o sferă și fiindcă în el se pot înscrie toate celelalte patru poliedre, după cum și Universul cuprinde în interiorul lui tot ce există. Euclid a demonstrat această teoremă cunoscută de altfel pitagoreicilor, care i-au dat dodecaedrului și numirea de „sfera din douăsprezece pentagoane". El are douăsprezece fețe, cîte trei întîlnindu-se într-un vîrf, și are tot atîtea muchii cîte are și icosaedrul. După cum e natural, construcția dodecaedrului implică tăietura de aur, un motiv în plus pentru a explica admirația pe care au arătat-o pitagoreicii față de dodecaedru (fig. 22).

— Poliedrele regulate te farmecă prin altă proprietate neașteptată, aceea că, deși par independente unele de altele, ele sînt foarte strîns legate prin așa-numita *proprietate de reciprocitate*. Două poliedre regulate se numesc *reciproce*, dacă centrele fețelor unuia dintre ele sînt vîrfurile unui alt

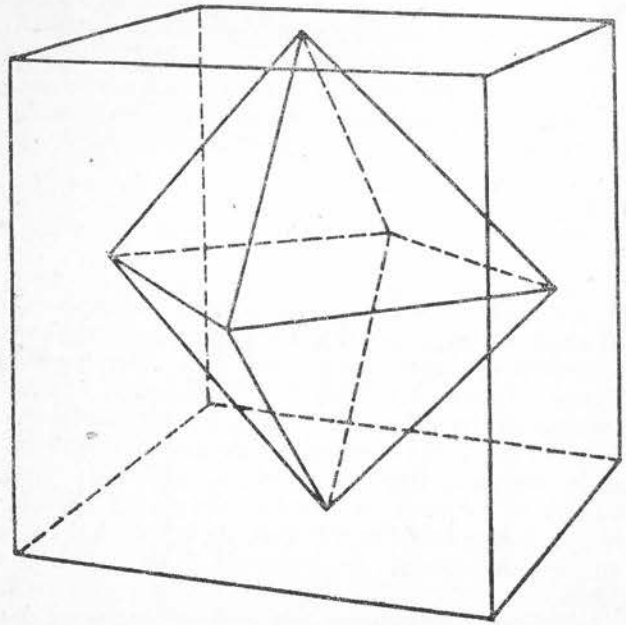


Fig. 23

poliedru regulat. Rezultă de aici că poliedrul reciproc unui cub este un octaedru, iar poliedrul reciproc dodecaedrului este icosaedrul. Singur tetraedrul își este propriul lui reciproc ! (fig. 23 și fig. 24).

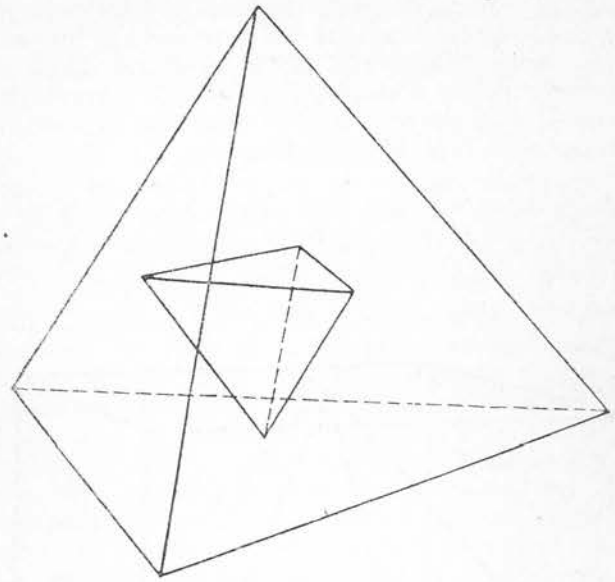


Fig. 24

Dar, cu toate că matematicienii greci au fost captivați de încă multe alte proprietăți ale poliedrelor regulate, fără să mai vorbim de faptul că acestea le-au oferit posibilitatea să compună o imagine unitară și armonioasă a Universului, acești lacomi de frumusețe nu s-au mulțumit numai cu existența lor. Ei au fost încîntați și de alte poliedre cu fețe poligonale regulate, dar nu și egale, *poliedrele semiregulate*, numite și *corpurile arhimedice* din cauză că, afară de unul singur, toate celelalte 12, căci de toate sînt 13 la număr, au fost descoperite de *Arhimede* și descrise mai tîrziu de *Pappus*.

— Adevărat, unul dintre ele a fost cunoscut de Platon care vorbește despre el în dialogul „Meno". O spune și

Heron din Alexandria, într-o formă care merită să o amintim : „deși Arhimede a descoperit cele 13 poliedre semiregulate, inscriptibile în sferă, Platon a cunoscut, de asemenea, unul dintre acestea, anume poliedrul cu 14 fețe, dintre care există două tipuri, unul făcut din 8 triunghiuri și 6 pătrate, ale aerului și ale pămîntului cunoscute mai dinainte de cei vechi, celălalt format din 8 pătrate și 6 triunghiuri, care pare să fie mai greu de obținut".

— Știu de ce ai ținut să-mi citești această însemnare, pentru expresia „8 triunghiuri și 6 pătrate ale *aerului* și *ale pămîntului*" ca să-mi dai dovadă că, după vreo cinci secole, matematicienii greci tot mai continuau să identifice poliedrele regulate cu simbolurile stabilite de pitagoreici. Pentru ei ceea ce noi numim azi *cub* era *pămînt*, iar *octaedrul* se numea *aer*, și asta fără să facă vreo confuzie de interpretare ! Drept să-ți spun și mie mi-a plăcut această descriere a ceea ce noi numim azi *cuboctaedru* și te rog să o citești în continuare, ca să vedem cum se obține el.

— Dacă se înscrie cîte un pătrat în fiecare față pătrată a unui cub, anume unind mijloacele laturilor lui, se obțin 6 pătrate și dacă se taie din vîrfurile cubului piramidele avînd ca bază triunghiurile astfel formate, poliedrul obținut are ca fețe 6 pătrate și 8 triunghiuri și se poate înscrie în sferă (fig. 25).

— Să precizăm deci că numim un poligon *semiregulat* sau *arhimedic* acela care are ca fețe poligoane regulate,

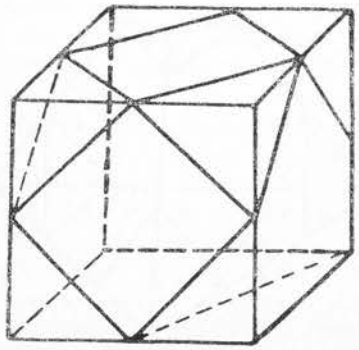


Fig. 25

însă nu și egale, iar unghiurile poliedre rămînînd toate egale între ele.

— E și natural să fie așa, dacă provin din poliedrele regulate prin secționarea vîrfurilor lor cu plane duse la o anumită distanță de vîrf. În cazul despre care am vorbit, secțiunea a fost la jumătatea muchiei, în altele ea poate fi alta, mai mică decît jumătatea muchiei, după cum *cere* și *trebuie să se determine,* cu condiția ca poligonul obținut prin secțiune *să fie regulat.*

— Cred că problema aceasta este destul de frumoasă ca să merite să o tratăm cu toată atenția. Să începem cu tetraedrul căruia ne propunem să-i tăiem vîrfurile. Dacă am proceda ca în cazul de mai înainte și am tăia vîrfurile prin plane duse la jumătatea muchiilor, vechile fețe ale tetraedrului s-ar transforma în niște hexagoane neregulate, dar dacă tăietura se face prin plane duse la $\frac{1}{3}$ de vîrf, atunci se obțin plane de secțiune paralele cu fețele tetraedrului care determină pe de o parte 4 fețe triunghiulare regulate și pe de alta 4 fețe hexagonale cu laturile egale cu $\frac{1}{3}$ din lungimea muchiei (fig. 26). Numele acestui poliedru este *te-*

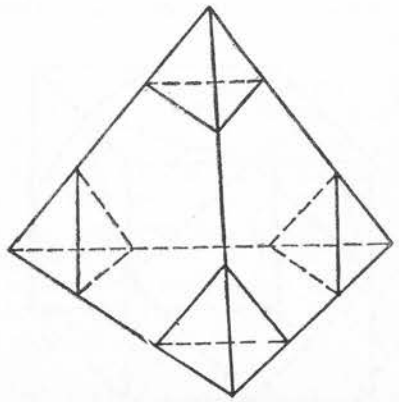


Fig. 26

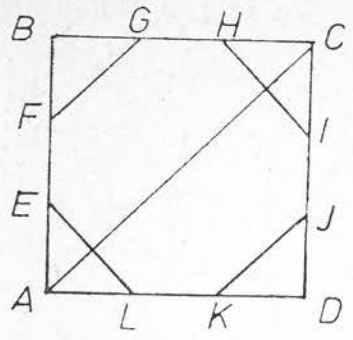


Fig. 27

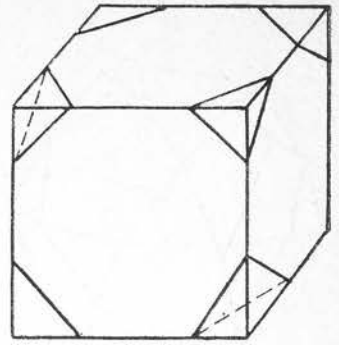


Fig. 28

traedul trunchiat. Cu *cubul trunchiat* trebuie procedat astfel cu fața octogonală să fie *un poligon regulat.* Rezultă că avem de făcut o socoteală, în așa fel ca din pătratul *ABCD* să apară octogonul regulat *EFGHIJKL* (fig. 27). Or, din figura 27 rezultă : $EF=FG$ și $EF+2BF=M$, dar din triunghiurile asemenea ABC și FGB avem $\frac{FG}{AC}=\frac{BF}{BA}$ *sau* $\frac{FG}{M\sqrt{2}}=\frac{BF}{M}$.

Așadar, $EF=FG=BF\sqrt{2}$, dar $BF\sqrt{2}+2BF=M$, de unde $BF=\frac{M}{2+\sqrt{2}}$ și deci $EF=\frac{M}{1+\sqrt{2}}=M(\sqrt{2}-1)$. Odată distanțele stabilite, putem construi cubul triunchiat, care este format din 6 fețe octogonale și 8 fețe triunghiuri echilaterale. Numărul vîrfurilor este de trei ori mai mare decît al cubului, așadar 24, iar la cele 12 muchii se adaugă $3 \cdot 8=24$, adică, în total, 36 de muchii (fig. 28).

Analog se calculează și distanțele la care trebuie duse planele de secțiune ca să se obțină octaedrul trunchiat, icosaedrul trunchiat precum și dodecaedrul trunchiat. Octaedrul trunchiat este format din 6 pătrate și 8 hexagoane, icosaedrul trunchiat are 12 pentagoane și 20 hexagoane, iar dodecaedrul trunchiat are 20 de triunghiuri și 12 decagoane. Interesant apare un alt poliedru, obținut din icosaedru prin secțiuni făcute la jumătatea muchiilor. Fiind vorba de fețe triunghiulare echilaterale, prin secționare se obțin tot triun-

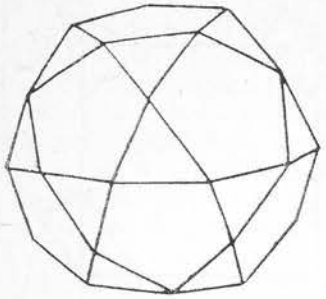


Fig. 29

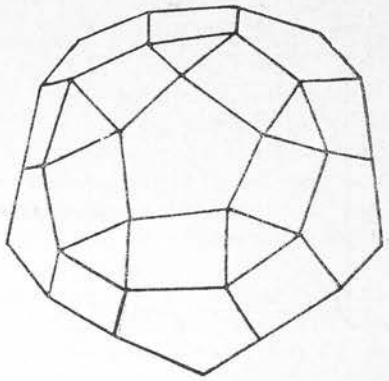


Fig. 30

ghiuri echilaterale, iar în fiecare vîrf apare un pentagon regulat. Aşadar poliedrul are 20 de feţe triunghiulare şi 12 feţe pentagonale, adică 32 de feţe şi e singurul poliedru arhimedian format din triunghiuri şi pentagoane. El se cheamă *icosododecaedru* (fig. 29). Poliedrele semiregulate despre care am discutat pînă acum se caracterizau prin aceea că pe suprafeţele lor se puteau deosebi două feluri de poligoane regulate. Celelalte 6 poliedre care au mai rămas se obţin printr-un procedeu mai complicat, pe care nu are rost să-l discutăm şi unele dintre ele au suprafaţa formată din *cîte trei feluri de poligoane regulate*. De pildă *romboicosododecaedrul* (fig. 30) are 30 de pătrate, 12 pentagoane şi 20 de triunghiuri, aşadar în total 62 de feţe. Tot din 62 de poligoane, anume pătrate, hexagoane şi decagoane este formată şi suprafaţa poliedrului numit *icosododecaedrul trunchiat* (fig. 31).

— Dar, deşi are tot atîtea feţe ca şi romboicosaedrul, acestea fiind poligoane cu mai multe laturi, numărul muchiilor şi al vîrfurilor lui este mai mare decît al celuilalt poliedru, anume are 120 de vîrfuri şi 180 de muchii ! Recordul însă îl bate *dodecaedrul teşit* cu 92 de feţe, 80 triunghiuri şi 20 pentagoane (fig. 32).

— În adevăr, frumoase rezultate. Numai că nimeni nu mai ştie cum au fost stabilite ele de către Arhimede, fiindcă lucrarea lui despre aceste poliedre s-a pierdut. Ceea ce cu-

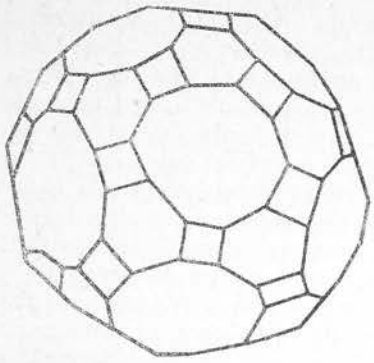


Fig. 31

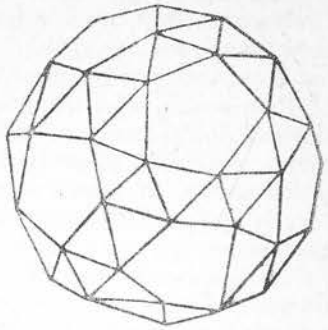


Fig. 32

noaştem o datorăm lui Pappus din Alexandria, acel pasionat cercetător al descoperirilor înaintaşilor lui născuţi cu cinci sau şase secole înainte. *Culegerea* lui, formată din 8 cărţi, se referă la rezultatele a vreo treizeci de matematicieni de odinioară şi printre ele se află şi acestea. În schimb, s-a păstrat o altă lucrare de a lui Arhimede care, din punctul nostru de vedere, are o importanţă deosebită.

— E drept ! Te gîndeşti la *Psammit* sau *Arenarium*, cum îi ziceau romanii.

— Şi căreia noi îi spunem *Numărarea firelor de nisip*. Cînd aude acest titlu, orice om cu bun simţ e îndrituit să se întrebe : E vorba de lucrarea unui copil cu imaginaţia exuberantă sau de îndrăzneala unui nebun ? Căci cine altul ar putea pretinde să numere firele de nisip din întregul Univers într-o scurtă viaţă de om ?

— Şi totuşi, le-a numărat, *El*, El, Arhimede care a inventat şi atîtea lucruri practice, care a găsit mijlocul să aprindă flota duşmanului ce voia să-i invadeze ţara, dar care cunoştea şi frumuseţea ispititoare a gîndului pur pe care o ascunde, ca pe o taină, matematica.

Să citim ce scrie el în prefaţa cărţii pe care a dedicat-o regelui Siracuzei : „Există oameni, o rege Gelon, care cred că numărul firelor de nisip este nesfîrşit de mare. Nu mă refer la nisipul din jurul Siracuzei şi care este răspîndit în întreaga Sicilie, ci chiar la acela ce există nu numai în ţările

locuite, dar și în acelea nelocuite. Alții cred că numărul firelor de nisip nu-i infinit de mare, însă că-i imposibil să-ți imaginezi un număr mai mare. Dacă acei ce gîndesc așa și-ar închipui un volum de nisip care ar fi egal cu acela al Pămîntului, care ar umple toate golurile sale și adîncurile mărilor și care s-ar ridica pînă în vîrful celor mai înalți munți, e evident că ar fi și mai puțin dispuși să creadă că ar putea exista un număr care să depășească pe acela al firelor de nisip. Cît despre mine, voi arăta prin demonstrații geometrice, pe care tu nu vei putea să nu le accepți, că printre numerele numite de noi... există unele care întrec numărul firelor dintr-un volum de nisip egal nu numai cu acela al volumului Pămîntului, ci încă cu al Universului întreg.

— Tatăl lui Arhimede fusese astronom și, contemporanul lui, Aristarh din Samos, stabilise nu numai dimensiunile Pămîntului, ale Lunii și Soarelui, dar și distanța de la Pămînt la Soare așa că Arhimede avea datele necesare ca să facă acest calcul, considerînd că întregul Univers ar fi finit și s-ar întinde pînă la sfera stelelor fixe care ar avea un diametru de 10^{12} ori mai mare decît distanța de la Pămînt la Soare. El a pornit să facă acest calcul, *complet gratuit*, fără să aibă măcar la îndemînă un sistem de numărare bine stabilit, așa cum îl avem noi. A luat, după cum știi ca unitate de bază *miriada*, cel mai mare număr imaginat de greci, număr pe care-l notau cu M și era egal cu 10 000. Considerînd miriada de miriade ($M^2 = 100\,000\,000 = 10^8$) ca pe o unitate de al doilea ordin a ajuns la $(10^8)^2$ și așa mai departe pînă la $(10^8)^{10} = N$. Acest nou șir forma numerele din perioada a doua, cele dintîi fiind acelea de la 1 la $M!$ Apoi, considerînd pe N ca unitate de ordinul al treilea a continuat în același fel, formînd numerele N^2 ... pînă la N^{10^8}. Numere fantastice, căci numai ca să-l scrii pe N ar trebui un șir de zerouri care să întreacă de multe ori distanța de la Pămînt la Soare, deși pentru firele de nisip din întregul Univers, numărul găsit a fost destul de modest, mai mic decît 10^{63}.

— Și dacă ne situăm în această atmosferă în care Arhimede și alți matematicieni puteau să se complacă și-i vedem urmărind cu mintea numere pe care nici cea mai puternică imaginație nu le-ar putea atinge, numai din plăcerea de a le contempla, nu-i de mirare ca Euclid să fi fost surprins și indignat la culme cînd unul dintre auditorii lui — om cultivat, căci altfel nu s-ar putea explica prezența lui la cursurile geometrului din Alexandria — l-a întrebat pe Euclid, după ce acesta și-a terminat prelegerea : „Și, la ce-mi folosesc mie toate aceste demonstrații ?

— Desigur, că cele ce demonstrase atunci Euclid nu aveau în vedere nici o aplicație practică ! De altfel, Euclid s-a ferit să introducă în *Elementele* lui vreo aplicație numerică sau vreun exercițiu. El expunea numai problemele teoretice, ca o delectare intelectuală. Așa că, trezit din visurile lui la realitate, Euclid nu a găsit alt răspuns decît acela de a-i spune sclavului, care-l asista, să-i dea ascultătorului acela cîțiva bănuți, ca să nu se fi ostenit de a-l asculta degeaba !

— Ce să-i faci dacă bietul om nu citise cursul de *Estetică* scris de Tudor Vianu.

MATEMATICA ŞI PICTURA

— Ultima dată ne-am despărţit evocîndu-l pe Euclid, tot la Euclid mi se îndreaptă gîndul şi acum dacă mă-ntreb care-i prima carte despre perspectivă care se cunoaşte ?

— Desigur, răspunsul îi clar : *Optica* lui Euclid ! Aşadar, dragă Nucule, mata eşti pregătit să discutăm *despre perspectivă !* Frumos subiect, mai ales că povestea ei are în ea ceva unic şi înduioşător. Stabilirea regulilor perspectivei a fost un ideal, o preocupare de căpetenie a pictorilor din Renaştere şi, începînd chiar din secolul al XII-lea, pasiunea aceasta a pus stăpînire pe gîndirea multor învăţaţi... S-au scris atîtea cărţi despre legile ei şi cînd, cîteva secole mai tîrziu, tainele i-au fost descoperite, satisfacţia de a o stăpîni a fost nimicită printr-o surpriză uluitoare : S-a descoperit fotografia, fotografia în culori şi cinematografia, care puteau executa, într-o fracţiune de secundă şi fără nici cea mai vagă cunoştinţă despre această ştiinţă, cel mai desăvîrşit şi complicat tablou în perspectivă, tablou care ar fi cerut calcule şi schiţe executate într-un răstimp de luni, dacă nu şi de ani de zile ! *Sic transit gloria mundi...*

— *Gloria mundi*, da, dar nu şi frumuseţea acestui studiu care a copleşit inimile tuturor pictorilor din *Quattrocento*, frumuseţe de care aş vrea să ne apropiem pe îndelete, mai înainte de a ataca şi alte probleme.

— Te-nsoţesc cu drag, dar ce facem cu Euclid ?

— Începem cu el, fiindcă de la el ne-a rămas *Optica*, deşi de aici nu rezultă că el este şi descoperitorul metodei de a reprezenta obiectele în perspectivă. Cred că n-aş greşi deloc dacă aş considera că asemenea preocupări s-au ivit şi în mintea omului care picta pereţii peşterilor !

— O mărturie mai palpabilă este acel perete al palatului din Cnossos pe care se află chiar o adevărată pictură

în perspectivă, iar că pe greci perspectiva i-a interesat şi cu mult înainte de Euclid, ne-o spune Vitruviu în prefaţa la Cartea a VII-a din *Arhitectura :* „Pentru prima oară la Atena, pe cînd Eschil punea în repetiţie o tragedie, Agatharhus a zugrăvit decorul acestei piese şi a lăsat o scriere despre această lucrare. Îndemnaţi de aceeaşi idee, Democrit şi Anaxagora au scris şi ei asupra aceluiaşi subiect, cum fixîndu-se centrul într-un anumit loc, liniile trebuie să răspundă după o lege naturală la direcţia privirii şi la împrăştierea razelor, pentru ca anumite imagini... să dea în picturile scenelor, înfăţişarea exactă a clădirilor şi pentru ca elementele acestora, figurate pe faţade drepte şi plane, unele să pară că merg către anumite puncte de fugă, altele că vin în faţa ochilor noştri". Aşa că, dacă-l credem pe Vitruviu, şi nu avem nici un motiv ca să nu-l credem, Anaxagora trebuia să fi scris despre perspectivă cu două secole mai înainte de Euclid, însă această lucrare, ca şi atîtea altele, s-a pierdut.

— De aceea am spus că ne vom referi la *Optica* lui Euclid ca să stabilim principiile perspectivei. [28] Mai întîi el consideră că lumina se propagă în linie dreaptă, dar după părerea lui şi a platonicienilor, razele de lumină pornesc din ochiul observatorului, nu de la obiect, şi formează un con care are drept bază conturul obiectului. Imaginea obiectului apare la intersecţia acestui con cu planul tabloului. Euclid a arătat că liniile paralele au un punct de fugă, acesta fiind punctul de intersecţie al imaginilor dreptelor paralele, din spaţiu. De la greci ne-au mai rămas şi alte cărţi despre perspectivă dar, cum nu ne propunem să zăbovim asupra istoriei consider numai faptul că studiul perspectivei a fost preluat de arabi şi dezvoltat sub numele de „ştiinţa aparenţelor". De la ei s-a întors iar în Europa de Apus, prin traducerile din limba arabă în cea latinească, începînd cu secolul al XI-lea. De atunci, această problemă a fost urmărită cu multă atenţie, la început de matematicieni apoi şi de pictori. Să nu uităm că în veacul al XII-lea existau trei Universităţi : cea din Paris, cea din Bologna, şi cea din Oxford, iar printre obiectele de studii figura şi perspectiva. De altfel, în *Opus majus*, Roger Bacon are un capitol destinat perspectivei şi tot atunci, adică în veacul al XIII-lea, Vitello a prelucrat *Optica* lui Euclid într-un tratat intitulat

Perspectiva. În același timp s-au mai scris și alte lucrări despre perspectivă, însă ele nu aduceau nimic nou, ci se mărgineau să repete cele scrise de Euclid asupra *punctului de vedere* și al *punctului de fugă.* Dar faptul că se scriau asemenea lucrări arată că pictorii au început să manifeste interesul pentru această problemă, care avea să schimbe cu totul concepția lor despre pictură. În timpul Evului Mediu nimeni nu și-a pus problema ca într-un tablou bidimensional să fie redat spațiul cu trei dimensiuni. Existau anumite procedee care dădeau figurilor și obiectelor un anumit relief, dar acestea erau prezentate într-un mod stilizat, iar pictura, în întregimea ei, avea un caracter simbolic. Pictorii de la începutul Renașterii au înțeles însă că perspectiva le dădea posibilitatea să pună în evidență *spațiul* în care se aflau modelele, reprezentate în așa fel ca să se poată stabili, dintr-o singură privire, legăturile și raporturile dintre formele reprezentate, care ar putea apărea chiar izolat sau dezlipite unele de altele. În cartea lui Leone Batistta Alberti, *Despre pictură,* tabloul trebuia să fie : „ca o fereastră transparentă prin care să apară o parte din lumea vizibilă". Această carte este de altfel primul tratat sistematic despre perspectivă. El arăta cum se pot reprezenta în perspectivă mai multe segmente egale, așezate unul în urma celuilalt și mai ales că perspectiva cercului aflat într-un plan neparalel cu planul tabloului era o elipsă. Deși Alberti a compus primul tratat sistematic privind perspectiva, Filippo Brunelleschi este considerat ca întemeietorul perspectivei moderne și, în cinstea lui, Florența i-a ridicat un monument funerar [8, p. 52]. El a arătat că într-un tablou se poate crea o desăvîrșită iluzie a spațiului cu trei dimensiuni, dacă punctul de vedere, adică ochiul observatorului, este situat la o distanță care corespunde cu distanța reală la care se află tabloul. El a introdus noțiunea de linie a orizontului și pe aceea de tablou fictiv transparent, care se interpune între tablou și obiect. El și elevii lui, Masaccio și Paolo Uccello foloseau aceste noțiuni în picturile lor, iar despre Uccello, Leonardo da Vinci își amintește că exclama : „O ce dulce este perspectiva". Tot Uccelo a desenat, pentru prima oară și după multă trudă, *un cerc* în perspectivă !

— În adevăr, elipsa, pe care Apoloniu o îndrăgise și îi studiase proprietățile cu vreo 17 secole înainte, a fost redescoperită, într-o formă cu totul rudimentară, acum în Renaștere.

— N-ai de ce te mira, tocmai de aceea sîntem în epoca Renașterii. Însă, practic, lucrurile nu au mers chiar așa de ușor, de pildă, problema punctului de fugă s-a impus destul de tîrziu, fiindcă pictorii nu puteau accepta ideea că dreptele paralele s-ar putea întîlni. De-abia pe la jumătatea veacului al XIV-lea el apare în tablourile lui Giotto, Lorenzetti, Jan van Eyck, aplicat la liniile paralele dintre dușumele sau cele ale plafonului [29].

— Să nu uităm că această teorie a perspectivei și strîns legată de ea, aceea a proporțiilor, impuneau studii serioase de geometrie, iar aceste studii s-au dezvoltat în secolele XV și XVI. Iată ce scrie Jan Bialostocki în cartea ce o avem înainte : „Pentru primele generații ale Renașterii perspectiva avea o însemnătate deosebită. Din punctul lor de vedere „perspectiva matematică nu numai că dădea, garanția corectitudinii (reprezentării realității), dar oferea, de asemenea — și poate, mai ales, de aceea — și garanția unei perfecțiuni estetice"... Problema corectitudinii reprezentării spațiului și a ceea ce se află în el era, așadar, în esență, identică cu problema de bază a esteticii Renașterii, care se remarca prin accentuarea armoniei drept cel mai important principiu compozițional. [8, p. 70] Și mai era ceva, acei pictori-geometri care au pătruns mai adînc problema, nu erau dispuși să o difuzeze în afară de cercul restrîns al elevilor pe care-i avea lîngă ei. Știu că Albrecht Dürer a făcut o călătorie anume, din Nürnberg în Italia, la Veneția și Bologna ca să învețe secretele perspectivei, „perspectiva tainică". Cînd s-a întors a scris o geometrie specială pentru pictori : *Îndrumări pentru măsurători cu ajutorul compasului și a riglei,* probabil inspirată de cartea lui Pierro della Francesca *Despre perspectiva în pictură,* care circula în manuscris sau poate după *Tratatul de pictură* al lui Leonardo da Vinci.

— Albrecht Dürer nu a fost numai un mare pictor, dar și un geometru pasionat. Am putea spune că era un matematician înnăscut, fiindcă în cărțile pe care le-a scris, deși erau adresate tinerilor pictori, se găsesc probleme importante legate de teoria proporțiilor, a tăieturii de aur, a secțiunilor conice, de poliedrele regulate sau semiregulate, de trisecția unghiului și duplicarea cubului, ba chiar și unele antici-

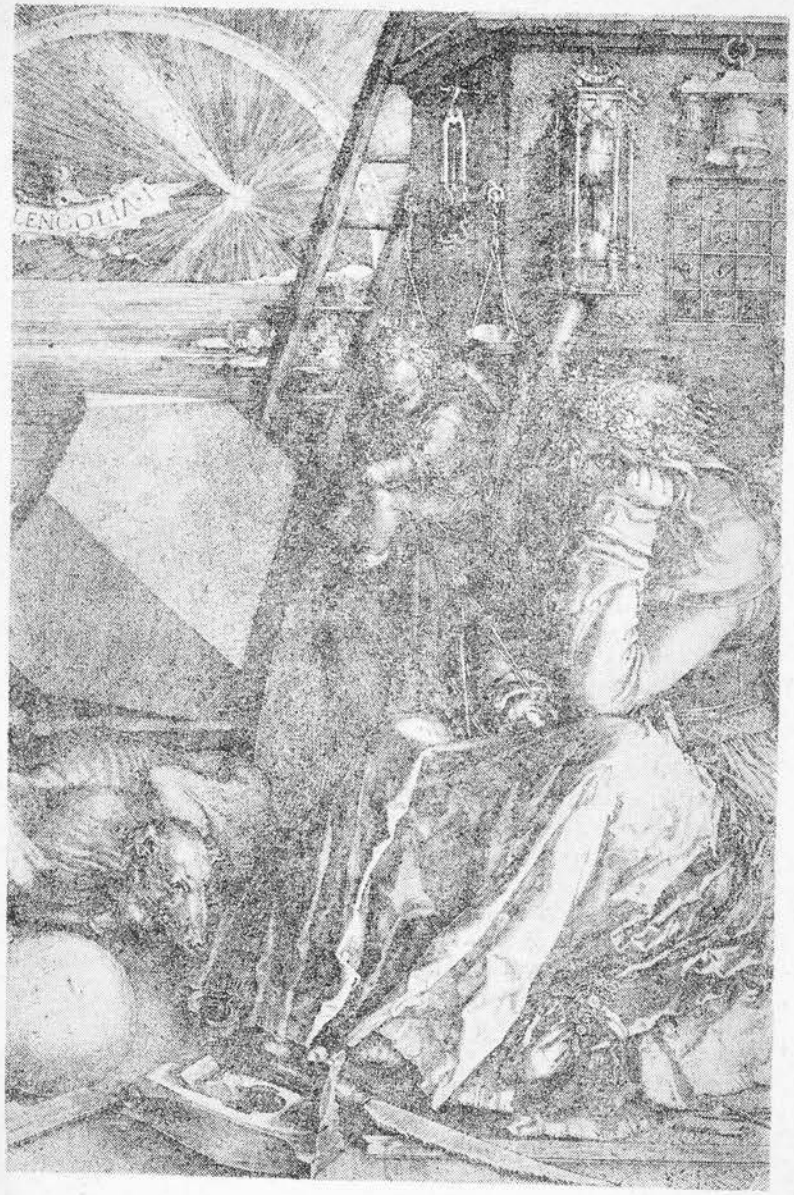
părі asupra geometriei analitice, probleme care au stîrnit admirația lui Galileu și Kepler. „Contactul cu Italia, evoluția studiilor asupra proporțiilor, reflectarea profundă la problemele artei l-au dus pînă acolo unde gîndirea teoreticienilor italieni nici măcar nu se abătuse — la analiza conceptului de frumos, la dezbaterea esenței și cognoscibilității acestuia... Italienii nu se întrebau dacă frumosul poate fi definit ; Alberti era convins că se poate afirma în mod obiectiv ce este frumos și că se pot stabili legile estetice ale acelui ideal unic, conducător ; Leonardo a intuit, ce-i drept problema subliniind... că există o varietate de frumosuri și diferite aprecieri estetice". [8, p. 93—94].

— Așa-i. Știu că Leonardo s-a exprimat în felul următor : „Chipurile frumoase sînt diferite, după cum diferite sînt și preferințele pentru frumos".

— Mă gîndesc la impresia pe care a făcut-o Leonardo da Vinci asupra lui Dürer. Căci de văzut, l-a văzut. Poate că l-a auzit chiar rostind acele vorbe, rămase în capitolul VII, intitulat „Despre perspectivă" din *Tratatul despre pictură :* „Pictorului îi este necesară matematica, aparținînd artei sale... Studiază întîi știința, apoi va veni practica acestei științe. Perspectiva este ghidul și ușa, fără ea nu se poate face nimic bun în pictură".

— Sînt aproape sigur de asta, o arată replica lui Dürer în *Prefața* la prima lui carte pe care a scris-o după ce s-a întors din Italia : *Îndrumări pentru măsurători cu compasul și rigla :* „Deși îndemînarea necesită numai o mînă liberă, opera executată în acest caz este inconștientă și făcută numai după fantezie. Privind această operă, pictorii înțelegători și adevărații artiști trebuie să rîdă de orbirea acelor executanți, fiindcă unei adevărate înțelegeri nimic nu-i apare mai displăcut decît falsitatea în pictură, chiar dacă aceasta a fost pictată cu destulă sîrguință. Faptul că asemenea pictori găsesc plăcere în greșeala lor vine de acolo că ei n-au învățat arta măsurării, fără de care nu poate exista și nu poate fi un meșter adevărat".

— Dürer și-a manifestat dragostea sau poate cultul pentru geometrie și prin gravura lui, în aramă, intitulată „Melancolia I", pe care a executat-o în 1514 după ce s-a întors din cea de a doua călătorie în Italia și se pare că sub impresia durerii pe care i-a pricinuit-o moartea mamei lui. În



„Melancolia" — gravură de Albrecht Dürer.

această gravură, care a fost de multe ori și în diverse feluri comentată, *Melancolia* a luat chipul *Geometriei,* e înaripată și ține în mînă un compas. Este îngrijorată. La ce se gîndește ? Nu a putut stabili legea care leagă frumosul de matematică ? La picioarele ei se află o sferă, la dreapta ei un imens dodecaedru și deasupra capului, pe un perete, se vede un pătrat magic, de ordinul patru, ceea ce arată că pe lîngă problemele de geometrie pură, pe Dürer l-a mai interesat și această problemă, deloc ușoară, din teoria numerelor. Jucîndu-mă odată cu acest pătrat, a cărui sumă a cifrelor este 34, m-am întrebat dacă nu cumva Dürer a ales acest număr drept constantă a pătratului său, fiindcă în acel an el împlinea tocmai 43 de ani ?

— Asta s-ar putea să fie o simplă coincidență, dar nu-i tot o simplă coincidență faptul că ai remarcat acest pătrat magic. Cred că poate fi un subiect foarte atrăgător pentru viitoarea noastră întîlnire. Ești de acord ?

— Bine, dar pînă atunci, să ne întoarcem la perspectiva noastră în legătură cu care am de gînd să-ți citesc cîteva rînduri scrise de Diderot în *Eseurile despre pictură :* „Primul pas spre înțelegerea clarobscurului îl formează studiul regulilor perspectivei. Perspectiva apropie părțile corpurilor, sau le face să se depărteze, numai prin simpla scădere treptată a mărimii, numai prin proiectarea părților lor, văzute printr-un plan interpus între ochi și obiect, și legate, fie chiar pe acest plan, fie pe un alt plan închipuit, dincolo de obiect. Pictori, dăruiți cîteva clipe studiului perspectivei : veți fi răsplătiți din belșug prin ușurința și siguranța cu care vă veți regăsi în practicarea artei voastre. Cugetați o clipă și veți recunoaște că trupul unui profet înfășurat în toată uriașa lui mantie, și barba lui stufoasă, și părul care i se zbîrlește pe frunte, și vălul pitoresc care-i dă capului un caracter divin sînt supuse în toate privințele acelorași principii ca și poliedrul. Pînă la urmă, unul vă va stînjeni la fel de puțin ca și celălalt. Cu cît vă veți înmulți numărul ideal al planurilor, cu atît veți fi mai corecți și mai adevărați, și să nu vă temeți că veți fi reci din pricina unei condiții mai mult sau mai puțin adăugate tehnicii voastre". [30, p. 519].

— Diderot a scris aceste *Eseuri* după 1765 și, după cum văd din nota ce le însoțește, ele au apărut „la unsprezece

ani după moartea filosofului (1795)", așadar la sfîrșitul veacului al XVIII-lea. Deduc din ele că atunci, entuziasmul și rîvna pentru studiul și mai ales aplicarea perspectivei în pictură scăzuse simțitor. Așadar, înainte de a atinge această problemă, cred că ar fi cazul să ascultăm sfatul lui Diderot și să „dăruim și noi cîteva clipe studiului perspectivei", ce zici ?

— Zic că-i bine, hai să începem ! Din punct de vedere geometric sînt posibile două moduri de reprezentare în perspectivă : *perspectiva paralelă* și *perspectiva centrală.* În perspectiva paralelă, corpurile din spațiu sînt proiectate pe planul desenului printr-un fascicul de raze paralele cu o direcție dată. Este o metodă convențională, bazată pe presupunerea că ochiul observatorului se află la infinit. Perspectiva paralelă este folosită pentru figurarea corpurilor din spațiu, în desenele din manualele școlare, dar și de pictorii din Estul Asiei : Japonia, China, India. În acest caz, atît liniile verticale, cît și cele paralele în spațiu, rămînînd paralele și în desen (fig. 33). În *perspectiva centrală,* lucrurile

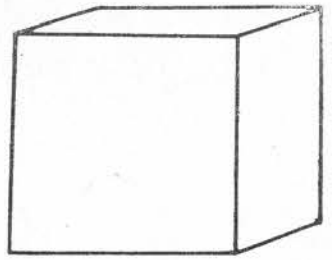


Fig. 33

se schimbă. În acest caz, proiecția obiectului din spațiu se face printr-un fascicul de raze concurente, punctul *O* de întîlnire, numit și *punct de vedere,* se presupune a fi ochiul observatorului. Totodată se presupune că planul pe care desenăm, *P,* este transparent, astfel ca razele vizuale duse din *O* la obiect să-l străbată. Dar mai bine să considerăm un exemplu. Fie *P* planul tabloului și *O* punctul de vedere, iar obiectul de proiectat un pătrat *ABCD,* planul lui fiind înclinat față de planul *P,* iar dreptele *AD* și *BC* paralele cu planul orizontal (fig. 34), anume *AD* este deasupra orizontului,

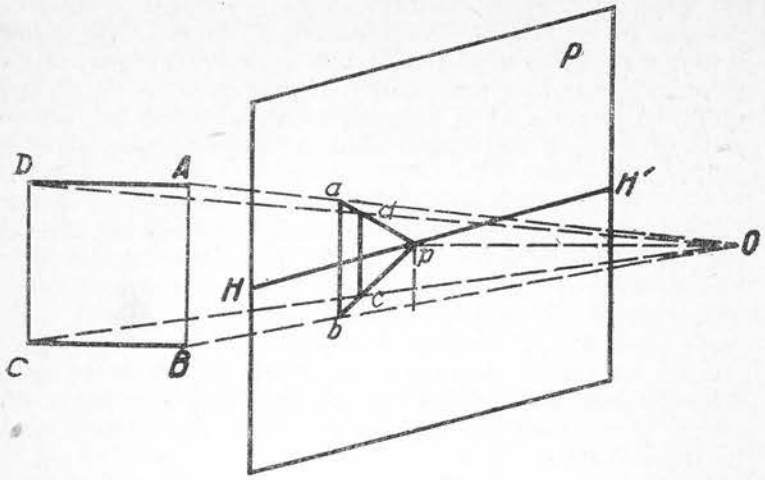


Fig. 34

iar *BC* sub orizont, punctele *A* şi *B* fiind mai aproape de planul *P* decît *C* şi *D*.

Razele vizuale *OA*, *OB*, *OC* şi *OD* înţeapă planul *P* respectiv în *a*, *b*, *c*, *d*, aşa că trapezul *abcd* reprezintă perspectiva pătratului *ABCD* din spaţiu, în planul *P*.

— Să stabilim mai întîi caracteristicile proiecţiei. Perpendiculara *Op*, dusă din *O* pe planul *P* reprezintă distanţa de la ochiul observatorului pînă la tablou, iar *p* poartă numele de *punct principal* sau *punctul ochiului*. Intersecţia planului orizontal ce trece prin *O* cu planul tabloului este linia orizontului *HH'* şi pe ea se găseşte punctul *p*. Se observă că perspectivele punctelor *C* şi *D* care sînt mai depărtate de planul *P* sînt *mai aproape de linia orizontului* decît ale punctelor *A* şi *B*. Iată explicaţia impresiei că cerul şi marea se întîlnesc la orizont, ori cerul şi cîmpia, sau, altfel spus, că toate punctele de la infinit au perspectivele lor pe linia orizontului. Ia să lămurim acum şi chestia *punctului de fugă*.

— Să considerăm din nou planul *P* şi o dreaptă oarecare *D* din spaţiu, căreia ne propunem să-i stabilim perspectiva. Excludem cazul că dreapta *D* ar fi paralelă cu planul sau cuprinsă în el. Ea se întîlneşte deci cu *P* în punctul *d* care

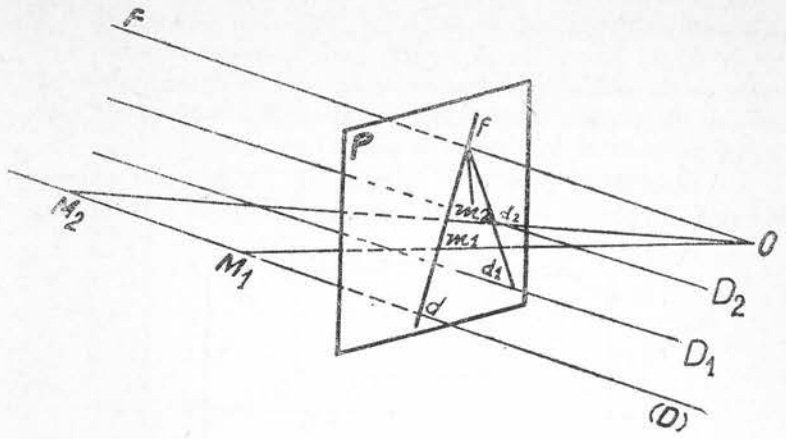


Fig. 35

se numeşte *urma dreptei D* (fig. 35). Dreapta *D* şi punctul *O* determină planul perspectiv al dreptei *D*, intersecţia acestui plan cu *P*, determină *perspectiva dreptei D*. Dacă din *O* ducem paralela la *D* adică dreapta *OF*, urma ei, *f*, se află tot în planul perspectiv al lui *D* şi este *punctul de fugă* al dreptei *D*. Acest lucru se vede uşor pe figură, căci dacă luăm un punct M_1 pe *D* perspectiva lui m_1 se apropie de *f* atunci cînd M_1 tinde sau fuge spre infinit, raza lui vizuală devenind *OF*. Se vede, de asemenea, că perspectivele tuturor dreptelor D_1, D_2 ... paralele cu *D* sînt d_1f, d_2f, adică perspectivele acestor drepte paralele cu *D* *se întîlnesc în planul tabloului în punctul lor de fugă f*. După poziţia pe care o are fasciculul de drepte paralele faţă de planul tabloului, punctul de fugă se poate găsi :

1. *în punctul ochiului, p*, atunci cînd dreptele sînt perpendiculare pe planul tabloului. În acest caz dreptele se numesc de adîncime.

2. *la infinit*, dacă fasciculul este format din drepte paralele orizontale şi paralele cu planul tabloului, aşadar perspectivele acestui fascicul sînt paralele cu linia orizontului.

3. *pe linia orizontului,* dacă orizontalele nu sînt paralele cu planul tabloului.

— Ar fi interesant să vedem cum se poate măsura *distanţa de la ochiul observatorului la tablou,* fiindcă desenul depinde de poziţia observatorului, apoi cum variază un desen în perspectivă în funcţie de această poziţie.

— Sînt două probleme diferite, să începem cu prima. Fie deci *P*, planul tabloului (fig. 36), *HH'* linia orizontului,

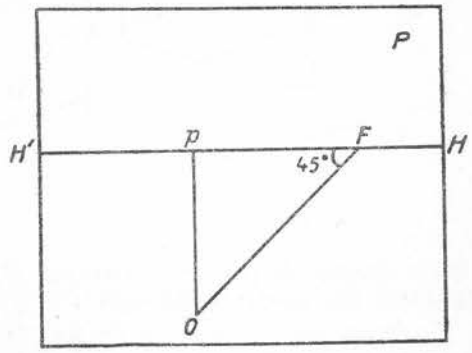


Fig. 36

O punctul de vedere şi *p* punctul principal. Am văzut că punctul de fugă al unui fascicul de drepte orizontale şi înclinate faţă de *P* se află pe linia orizontului. Alegem fasciculul înclinat cu 45° faţă de planul tabloului. În acest caz, punctul de fugă *F* formează cu O şi *p* un triunghi dreptunghic isoscel, din care rezultă $Op=pF$, adică *distanţa* observatorului faţă de tablou este dată de segmentul *pF*. De aceea, punctul *F*, sau simetricul lui faţă de *p*, se numeşte şi *punct de distanţă.* Acum, folosind această noţiune, să rezolvăm cealaltă problemă, adică să vedem cum variază desenul în perspectivă al unei camere, de pildă, cînd se schimbă poziţia observatorului. Să spunem că în camera respectivă există o fereastră în dreapta şi un covor cu dungile perpendiculare pe peretele din faţă, adică ceea ce am numit drepte de adîncime. Să admitem că punctul ochiului *p* este aşezat în mij-

locul camerei, la o distanţă de $\frac{2}{3}$ din lăţimea camerei şi la o înălţime potrivită, aşa ca linia orizontului să treacă prin mijlocul camerei (fig. 37). Dacă punctul de vedere, *p*, este

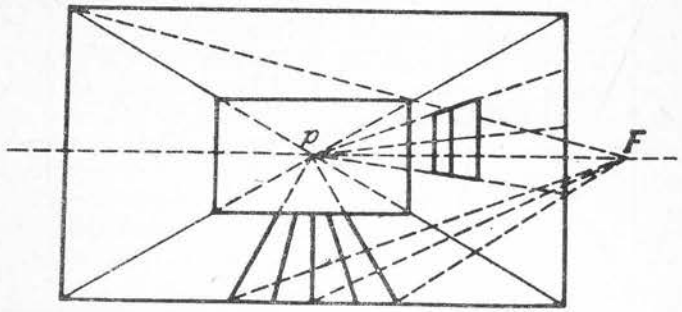


Fig. 37

aşezat mai jos (perspectiva broaştei), distanţa rămînînd aceeaşi, atunci simetria care trezea un sentiment de armonie dispare, iar partea de sus a camerei este redată mai amplu decît cea de jos (fig. 38).

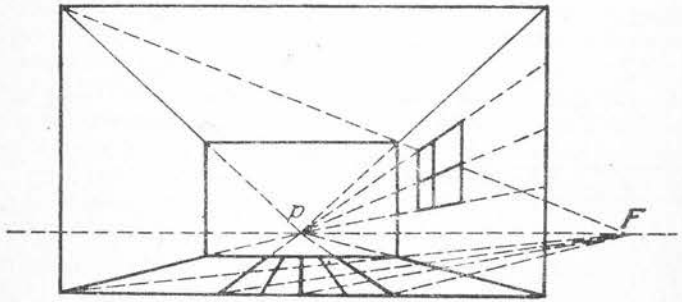


Fig. 38

Din contra, dacă punctul de vedere ar fi aşezat prea sus (perspectiva păsărilor), partea de jos a camerei ar fi mai lăţită mai mult decît cea de sus. Iar dacă şi punctul de

vedere îşi schimbă poziţia şi nu mai este aşezat la mijloc, atunci nici pereţii laterali nu mai păstrează simetria care o aveau în cazurile anterioare (fig. 39).

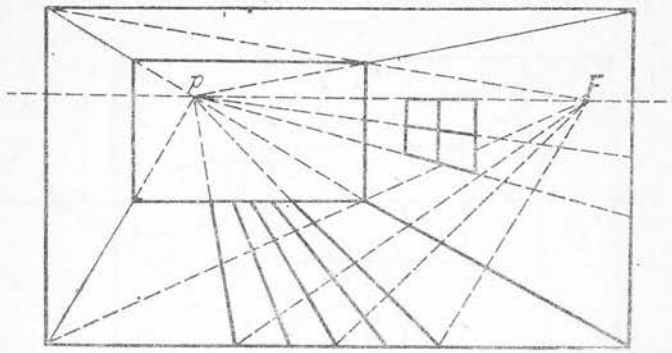


Fig. 39

În fine, să mai considerăm şi cazul cînd punctul de vedere rămîne din nou la mijloc, dar distanţa de la care se priveşte camera este egală cu de două ori lăţimea ei (fig. 40). În acest caz, aspectul este cu totul diferit, căci observatorul poate cuprinde cu vederea dintr-odată tot spaţiul.

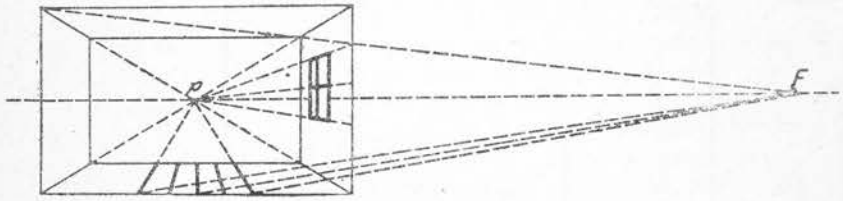


Fig. 40

— Acestea-s doar cîteva dintre noţiunile acestei ramuri a geometriei ce a vrăjit pe aproape toţi pictorii din Renaştere şi pe alţii de mai tîrziu, care considerau perspectiva drept o călăuză ideală înspre tainele frumuseţii, aşa cum o vedeau ei.

— Aş preciza că numai *a unei părţi* din tainele frumuseţii, căci la perspectivă ei mai adăugau şi ştiinţa pregătirii culorilor, despre care nu putem vorbi nimic. În cartea lui Noël Mouloud, *Pictură şi spaţiu,* am găsit unele observaţii, care-mi pare că precizează mult mai bine decît am putea-o face noi modul şi limitele acestei înfrăţiri din pictura Renaşterii şi geometrie : „Perspectivele centrale relevă, în primul rînd ascendenţa spaţiului asupra obiectului, motiv pentru care arta Renaşterii, propunîndu-şi să intensifice sentimentul totalităţii spaţiale, le-a preferat cu deosebire... Se poate remarca, de asemenea, că individualitatea de fizionomie a unui obiect se bazează pe anumite constante ce rezistă deformărilor de perspectivă. În acest sens, vedem cum desenatorul păstrează ovalul caracteristic al feţei umane — atunci cînd trebuie să o prezinte înclinată — în detrimentul exigenţelor deformării de perspectivă... Pictura contemporană, atunci cînd abordează principiul perspectivei imobile şi unice, eliberează întrucîtva această reciprocitate dintre formă şi *situs :* ea se serveşte de maniera în care figurile se prezintă privirii pentru a modifica perspectivele aparente... Compromisul care are loc, la nivelul figurilor, între obiectivitate şi prezenţă îngăduie depăşirea logicii spaţiilor geometrice în direcţia logicii spaţiilor fenomenale". [31] „Poate că în nici o etapă a istoriei artei, voinţa de a apropia scopurile cunoaşterii cu acelea ale artei nu a fost atît de marcată ca în pictura secolului al XVI-lea. Evident, nu pînă în punctul în care cele două tipuri de finalitate trebuie să se confunde. Cercetările lui Leonardo sau ale unui Dürer se orientează spre particularizarea tipurilor structurale, a figurilor vii a căror formă normală este fără încetare deformată prin modurile existenţelor individuale, sau factorii de situaţie : căutînd valorile „caracteristice", aceşti pictori au mers foarte departe în sensul scopurilor cunoaşterii. Totuşi, exigenţele stilizării estetice au făcut să prevaleze fără încetare drepturile acestora... Este vorba de condiţiile deplinei pregnanţe vizuale, care obligă pictorul să recompună şi să rectifice formele reale astfel încît ele să rămînă euritmice în fiecare dintre perspectivele alese. Astfel, figura reprezentată rămîne un compromis între „normele" realităţii şi „normele" intuiţiei estetice... Pictorul renascentist se considera el însuşi ca un geometru al spaţiului vizibil, dar estetica modernă,

care a luat cunoştinţă de condiţiile şi semnificaţia perspectivelor picturale, ştie bine că geometria tablourilor Renaşterii este încărcată de anumite valori, că ea idealizează aspectele lumii vizibile, astfel încît să pună în lumină caracterul lor de inteligibilitate formală... În ultima analiză, modul „de punere în perspectivă" al artei este mai mult decît o manieră de a vedea lucrurile. Este vorba de o manieră de a înţelege lucrurile înserîndu-le mai profund în contextul lumii ca orizont al vieţii noastre, sau modul participării noastre la actele umane". [31, p. 219—222]

— Se pare că pictorii au ajuns la o nouă concepţie în ceea ce priveşte raportul dintre lume şi spaţiu atunci cînd au înţeles că dimensiunile spaţiului estetic sînt altele decît dimensiunile geometrice ale spaţiului fizic sau ale spaţiului vizibil.

— În această privinţă, cred că trebuie să folosesc iar cartea lui Mouloud, fiindcă el introduce noţiunea de *spaţiu pictural* cu o semnificaţie cu totul diferită de a spaţiului aşa cum îl înţelegem noi : „Se poate spune că pictorul instaurează sau instituie un spaţiu mai puternic structurat în raport cu spaţiile experienţei noastre obişnuite şi că, graţie organizării acestui spaţiu, el ne permite să realizăm actul unei viziuni pătrunzătoare şi unificate... De altminteri, pictura non-figurativă realizează efectiv această separaţie, întrucît ea pune un accent aproape exclusiv pe relaţiile formale." [31, p. 49] Iar mai departe, îl citează pe Merleau-Ponty : „Spaţiul nu este mediul (real sau logic) în care se dispun lucrurile, ci mijlocul prin care poziţia lucrurilor devine posibilă". [1. c, p. 54]. Şi tot despre spaţiul pictural, Mouloud ne spune : „Spaţiul pictural pune în valoare, într-un mod cu totul particular, factorii organizării vizibile, grupările, limitele, intervalele, schemele structurale. El are legăturile sale proprii cu imaginaţia formatoare şi plastică, un fel propriu de a evoca structurile lumii materiale şi ale lumii spiritului" [31, p. 151].

— Aşadar, după cîte înţeleg eu, pictorul modern şi-a creat un *spaţiu al lui, propriu — spaţiul pictural* —, care este un spaţiu abstract, şi figurile introduse de el nu mai sînt legate de nici un fel de constrîngere geometrică. Aceste figuri se pot înlănţui între ele după anumite legi formale sau decorative, aşa cum crede de cuviinţă pictorul.

— Şi aici iar se cade să facem un popas, căci nu putem evoca *spaţiul abstract* fără să vorbim şi de *pictura abstractă !* Nu, nu te speria, nu despre întregul domeniu, ci numai despre acele aspecte şi despre acei pictori care au cochetat cu geometria.

— Da, îmi închipuiam că n-ai să-l faci uitat pe Mondrian, mi-ai arătat odată volumul apărut la noi, dar poate că ai de gînd să ataci şi cubismul ?

— În primul rînd. Ascultă ce spune Noël Mouloud : „în operele cubiste, geometria cedează unui fel de *topologie* în care spaţiul dobîndeşte formă pe măsură ce ordonează şi informează diferenţele locale : intervalele nu sînt decît faze în balansarea formelor, fiind angajate în jocul continuităţilor şi discontinuităţilor, în drama însăşi a instalării formelor în spaţiu". [31, p. 149]. Dar pe lîngă această subtilă observaţie, o mai amplă caracterizare a cubismului o aflăm în cartea lui Werner Hofmann : *Fundamentele artei moderne.* Aici am găsit şi anecdota cu privire la denumirea curentului : „În septembrie 1908, Matisse, care în acel an fusese membru al juriului de toamnă, a povestit că Braque a trimis la Salonul de toamnă tablouri *cu mici cuburi.* Pentru descriere el a desenat — pe bucata sa de hîrtie — două linii ascendente, care se întîlneau sus şi, între ele, cîteva cuburi. Din aceasta criticul a făcut cuvîntul *cubism*". [32]. Apoi încă : „Cézanne spunea lui Émile Bertrand : „Toate formele în natură se pot reduce la sfere, conuri şi cilindri. Trebuie început cu aceste elemente de bază simple, apoi se va putea realiza ce doreşti". Trei ani mai tîrziu, această observaţie a fost publicată şi de atunci ea constituie un argument pentru legătura cubiştilor cu voinţa artistică a lui Cézanne... cubiştii voiau să pună insistent în evidenţă anumite proprietăţi ale lumii reale — cum ar fi cea a materialităţii tridimensionale — în prima lor fază sistematică, ceea ce a cubismului analitic, ei tindeau totuşi să treacă de la conţinut la formă. Ei folosesc mijloacele geometrice de exprimare nu numai pentru explicarea lumii obiectelor, ci pentru punerea în evidenţă a „osaturii" lineare a tabloului... Este evident că lumea vizibilă este geometrizată... Acesta este şi scopul reprezentării cubiştilor : realitatea este pentru ei ceva permanent şi invariabil. Ceea ce vor ei este „părăsirea diversităţii lumii corporale, pentru liniştea netulburată a operei de

artă"... În faza sa analitică, cubismul ia — atît față de obiect, cît și față de tablou — o poziție oscilantă. La lămurirea acestei situații echivoce, care nu găsea o soluție clară nici pentru conținut nici pentru formă, a contribuit hotărîtor spaniolul Juan Griss. Împreună cu Picasso și Braque el încearcă să stabilească un acord între cerințele geometriei tabloului și cele ale lumii empirice. Aceasta înseamnă că mijloacele de creație independente trebuie aduse din nou spre lumea reală fără ca din cauza aceasta să-și piardă autonomia... Definiția dată de Griss picturii, *ca un fel de arhitectură plată și colorată* încheie o evoluție care se întinde departe înapoi în istoria picturii europene și al cărui obiect este *eliminarea treptată a valorilor plastice ale tabloului*". [32, p. 40—48].

— Știi că, în 1982, cînd s-au împlinit 100 de ani de la nașterea lui Georges Braque, s-a organizat la Paris o expoziție comparativă ?

— N-am știut, dar era normal să fie așa, fiindcă, după părerea cunoscutului estetician francez Jean Grenier, „Braque este un mare pictor clasic ; el n-a inovat decît ca să dea un model și nu ca să provoace un scandal". [33].

— Foarte interesantă observație. Dar despre cubismul lui Braque, ce scrie ?

— Scrie multe. N-am să-ți citesc decît observațiile cuprinse în pasajul : „Despre spațiu". Cubismul a făcut să dispară un anumit număr de elemente care păreau pînă atunci că fac parte integrantă din pictură. Cézanne renunțase deja la perspectivă și la atmosferă ; apoi, dispăruse subiectul și, odată cu el, temele tradiționale, portretul, nudul, peisajul : tonul local își pierduse firește rațiunea lui de a exista ; fără obiect în sensul vechi al cuvîntului. Publicul surprins se întreba ce putea „reprezenta" un astfel de tablou, și artistul ironic aștepta această întrebare ca să-i răspundă cu dezinvoltură că nu reprezenta nimic, că n-avea ce să reprezinte... Cubismul a reinventat totul : fără obiecte propriu-zise și, pentru că nu mai sînt obiecte așa cum le concepem noi, nu mai este nici un spațiu închis și delimitat cu care maeștrii Renașterii ne obișnuiseră ochiul și care ni se păruse în cele din urmă cel adevărat. De acum înainte spațiul va fi *închipuit :* nu va mai fi vorba de a-l imita, ci de a-l sugera... Pictura are să devină *superficială,* în realitate devine *profundă.* Cînd pictorii clasici reprezentau peisaje, ce făceau ? Pictau un spațiu pur vizual, dădeau unele „priveliști"... dar treceau sub tăcere primele planuri. Marea descoperire de care Braque, mai mult ca oricare altul din epoca sa, își va lega numele, este aceea a spațiului tactil, care evocă imaginile musculare ale pictorului ce înaintează pe pămînt, ale mîinii care apucă lucrurile din fața ei și pune stăpînire pe ele, pe scurt un spațiu în cele din urmă mult mai puțin abstract decît primul, în orice caz mai bogat și mai complex... Spațiul tactil este cel care ne desparte de obiect, spațiul vizual cel care desparte obiectele între ele. Primul reprezintă într-adevăr ceea ce caracterizează cel mai bine structura pînzelor lui Braque... tabloul nu mai etalează formele pe același plan, le conduce din adînc spre suprafață (în timp ce la clasici, le conduce de la suprafață spre fundul perspectivei)... Dintre toți pictorii de azi, el este unul dintre cei care, prin cea mai severă disciplină, ajunge la cea mai frumoasă expresie a materiei, căreia îi dă cea mai bună definiție : „Materia este ceea ce poate emoționa pipăitul". [1. c, p. 44—48].

— În adevăr, nostimă și originală definiție a materiei !

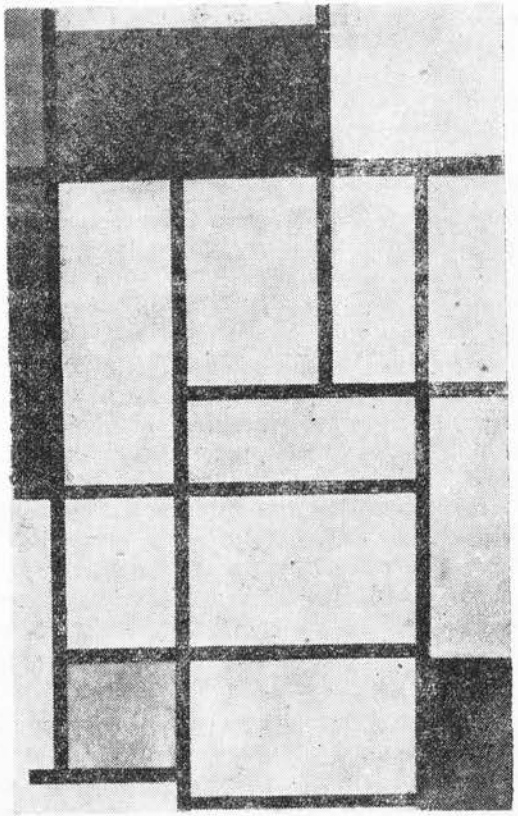
— Aș spune mai degrabă, *subtilă* decît nostimă. Cred că ai să-mi dai dreptate după ce am să-ți mai citesc alte cîteva observații ale lui Jean Grenier despre acest pictor pe care se vede că autorul l-a admirat mult. „Acest om aparține marei tradiții clasice, aceea a austerității în măreție... printr-o despuiere continuă, printr-o simplitate dobîndită, a făcut să apară o nouă poezie a unei naturi inventate din nou. Căci, dacă mijloacele diferă, scopul este întotdeauna același : să șteargă caracterul uzual și artificial al obiectelor, pentru a le vedea ca în prima zi a lumii, cu ochii unui copil : în existența lor și nu în funcția lor ; atunci fiecare lucru comunică cu fiecare alt lucru așa cum au înțeles-o foarte bine popoarele primitive... Există o viață comună a profunzimilor... E bine să inventezi natura din nou ; e și mai bine s-o reînsufletești. Braque a ajuns aici ca și ceilalți, mai bine chiar decît ceilalți, după părerea mea, înlocuind convențiile vechi cu cele noi. Mai ales în ceea ce privește spațiul. Începînd cu Paolo Uccelo pictura a trăit pe o convenție majoră pe care toată lumea a considerat-o în cele din urmă o simplă copie a

realității : perspectiva. Dar nimic nu este mai artificial decît perspectiva".

— Iartă-mă că te întrerup, dar versurile lui Eminescu îmi sună în urechi :

„Ce-un secol o zice, / Ceilalți o dezic". Te rog, continuă.

— „Numeroase epoci, numeroase țări au ignorat-o sau o ignoră. După Cézanne, contemporanii au abandonat-o. S-a terminat cu „priveliștile", cu etajările, cu fuga spre liniile orizontului. Pictura devine ceea ce este logic să fie : umplerea unei suprafețe plane cu culori rînduite, urmînd o ordine



Ritmuri (P. Mondrian).

determinată. Dar un element spiritual însoțește întotdeauna o tehnică : la chinezi este gruparea de evenimente succesive sub formă de aluzii lineare : aici este invenția spațiului tactil". [33, p. 217—219].

— Jean Grenier spune că Braque a ajuns *la o natură inventată din nou* grație unei *simplități dobîndite* printr-o despuiere continuă. Cred că Piet Mondrian a atins maximum de simplitate, cea mai perfectă simplitate, căci toate tablourile pe care le-a pictat el în ultimii 26 de ani ai vieții lui reprezintă două fascicule de drepte paralele : un fascicul de drepte verticale care se întretaie cu altul de drepte orizontale, formînd între ele diferite dreptunghiuri sau pătrate colorate „asemănătoare între ele, și totuși întru totul diferite", după cum se exprimă Victor Ieronim Stoichiță în albumul-monografie : Mondrian. [34]

— Bine, dar Mondrian a depășit cubismul, el este unul dintre promotorii de seamă ai abstracționismului. Și, în privința tablourilor naturaliste, el este de părere că ar trebui întoarse „cu pictura înspre perete, pentru a fi folosite doar ca elemente de divizare a peretelui". [32, 2, p. 89].

— Asta, probabil, ca o aluzie la convingerea lui că „forma trebuie să se realizeze în suprafețe și în linii drepte". Iată cît de frumos prezintă V. I. Stoichiță viziunea artistică a lui Mondrian : „Încrucișarea de perpendiculare care delimitează cîmpul cromatic urmează legi consacrate de psihologia formei : unghiul drept este singurul care poate împărți spațiul — prin repetare — în zone calitativ egale. Tensiunile angulare sînt astfel anulate.

Îmbinarea contrariilor vertical-orizontal și echilibru de culoare structurează fiecare operă a lui Mondrian după o lege clasică : cea a *catharsis*-ului. Pătratele neoplastice sînt și rămîn în primul rînd pictură. O pictură de înaltă calitate, în care primează nu *factura*, ci respirația compoziției, nu substratul simbolic, ci epifania armoniei. Nu se poate să nu admirăm încă o dată marele dar al pictorului de a aduce în planul vizualității cele mai adînci conținuturi ale spiritului. Pictura lui Mondrian nu e o pictură simbolică, ori alegorică, ori arhetipală. Ea nu se poate descifra complet cu ajutorul unui text sau al altuia, printr-o trimitere la cutare sau cutare rădăcină culturală..." [34, p. 16] Și mai departe, această completare : „Mărturiile celor ce l-au cu-

noscut pe Mondrian arată că pictorul nu lucra după trasee geometrice prestabilite. Nu folosea nici un instrument special, ci doar mijlocirea „ochiului și a intuiției". „Planul rectangular — scria el — trebuie mai degrabă considerat ca o rezultantă a pluralității liniei drepte în opoziție rectangulară". Faptul că analizele posterioare au dovedit existența invariabilă a „proporției de aur", în operele din ultima perioadă, nu face decît să confirme existența unei alese sensibilități ritmice la Mondrian. Asimetria echilibrată de greutatea culorilor și de ritmul perpendicularelor tinde să confere operei „calmul și seninătatea Universului". Armonizarea contrariilor atinge în seria patrulaterelor „neoplastice" treapta cea mai înaltă : cea a unei „Frumuseți plastice pure", echivalent artistic a „ceea ce în filosofie este Adevărul". [34, p. 18].

— Împărtășesc și eu această admirație a autorului față de opera lui Mondrian, numai că aș vrea să observ că foarte multă lume ridică din umeri și rămîne indiferentă cînd privește pătratele și dreptunghiurile lui colorate sau, cel mult, adaugă : — Nu înțeleg nimic, ce fel de pictură e asta ?

— Iată ce a răspuns Picasso, cînd s-a aflat și el într-o împrejurare asemănătoare : „Toată lumea vrea să înțeleagă pictura. De ce nu încercăm să înțelegem cîntecul păsărilor ? De ce iubim o noapte, o floare, tot ce înconjoară omul, fără să căutăm să le înțelegem ? În timp ce pictura vrem să o înțelegem. Să se înțeleagă mai ales că artistul muncește din necesitate ; că și el este un element infim al lumii, căruia n-ar trebui să i se dea mai multă importanță decît atîtor lucruri ale naturii care ne farmecă, dar pe care nu ni le explicăm... Un tablou îmi vine de departe... Cum se poate pătrunde în visele, în instinctele, în dorințele, în gîndurile mele, cărora le-a trebuit mult timp să se formeze și să se manifeste, mai ales pentru a sesiza aici ceea ce am pus, poate, în ciuda voinței mele ?" [33, p. 222]

— Superbă replică și venită parcă anume ca să-mi dea apă la moara mea ! Fiindcă voiam să-ți propun să încheiem discuția de azi trecînd de la tablourile lui Mondrian, care ne-au desfătat prin analogia pe care el a știut să o stabilească, între o anumită mulțime de drepte verticale perpendiculare pe altele orizontale și un anumit aspect al armoniei din Univers, la un alt mod de desfătare, pus la înde-

Portret de bărbat de P. Picasso.

mînă de geometria analitică și diferențială, care are la bază numai o singură pereche de drepte perpendiculare : sistemul de coordonate cartezian.

— Găsesc foarte nimerită propunerea asta și o accept cu bucurie cu atît mai mult cu cît nu mă gîndisem la ea. Descartes și Fermat au fost cu adevărat doi mari vrăjitori, fiindcă au deschis cu această cheie magică a sistemului de coordonate toate cutiuțele ecuațiilor algebrice și nealgebrice, ca să scoată din ele tot felul de imagini, care mai de care mai surprinzătoare, începînd cu o linie dreaptă și sfîrșind cu un fascicul, uneori infinit, de curbe. De cîte ori n-am stat,

după ce reuşeam să construiesc o curbă, mut de admiraţie în faţa ei şi mă întrebam cum de-i posibil ? Cum se poate ca dintr-o ecuaţie în x şi y sau în care, dacă era numai în x şi-am înlocuit pe zero cu y, să răsară nu alte numere, ci *o curbă, o linie* atrăgătoare prin înfăţişarea ei : uneori închisă ca un cerc, dar avînd anumite particularităţi ori cochetării pline de eleganţă, alteori, din contra, întinzîndu-şi braţele pînă la infinit, obligîndu-te parcă şi pe tine să-i urmăreşti drumul sinuos sau în linie dreaptă spre necunoscut. Dar, în loc să pălăvrăgesc, hai la treabă. Ce ecuaţie îmi propui pentru început ?

— *Melcul lui Pascal.*

— Grozav mai eşti matale, Bădie ! Credeai că mă prinzi aşa-i ? Ei bine află că nu ! *Melcul lui Pascal* are şi un mod de generare foarte frumos, aşa că, mai înainte de a-i scrie ecuaţia şi a-i construi curba vreau să-i amintesc geneza. Consider un sistem de coordonate dreptunghiular xOy şi un cerc de diametru a care trece prin O şi are centrul C pe axa Ox. Prin punctul O de pe cerc se duc razele vectoare care taie cercul în M. Fie una dintre ele OM, pe aceasta fixez, pornind din M, două segmente egale şi opuse, anume MT şi MT', avînd, atunci cînd M variază, aceeaşi valoare constantă : m, adică $MT=MT'=m$. Locul punctului T este *melcul lui Pascal*, iar ecuaţia acestei curbe, în coordonate carteziene şi pentru $a=m$ este :

$$(x^2+y^2-4x)^2 = 16\,(x^2+y^2) \qquad \text{(fig. 41)}$$

— Aşa-i, numai dacă mai spui că în cazul particular $a=m$, melcul lui Pascal poartă şi numele de *cardioidă*, iar atunci T' şi O se confundă, curba avînd în O un punct de întoarcere, adică nu mai are chiar forma care ai desenat-o tu, ci aceasta pe care o desenez eu (fig. 42).

— Aşa-i, dar dacă-i vorba pe-ntrecere, atunci am să mai adaug că aceeaşi *cardioidă* este şi o *epicicloidă*, adică o curbă născută de un punct fix al unui cerc exterior şi mobil care se rostogoleşte, fără alunecare, pe cercul fix. De aceea te rog să desenezi şi cercul mobil, cu o linie punctată.

— Acum să construim curba care are ca ecuaţie :

$$(x^2+y^2)^3=27x^2y^2.$$

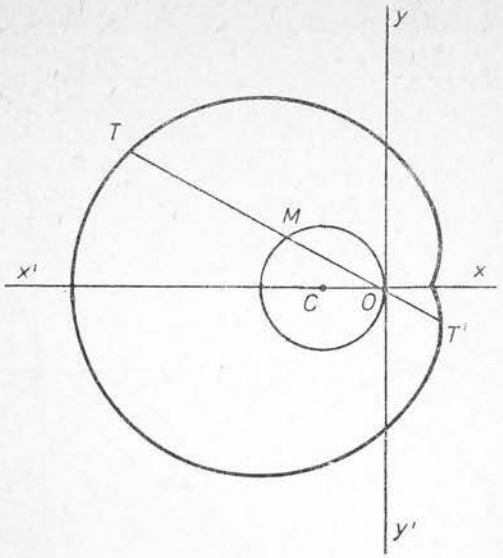


Fig. 41

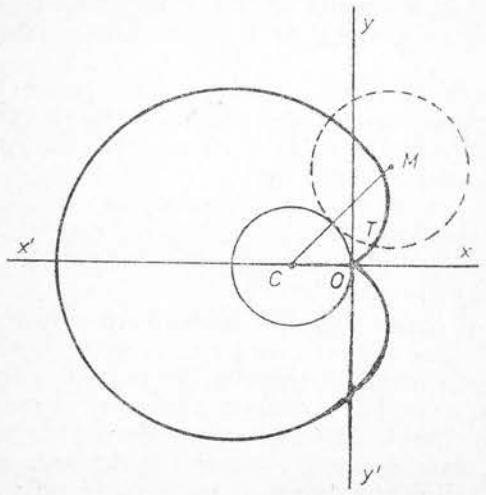


Fig. 42

— Văd că te persecută pe mata grupul acesta (x^2+y^2) şi, ştiu de ce, ca să mă obligi să folosesc coordonatele polare. Bine, fie voia matale, iată şi curba care, în adevăr că a meritat să o construiesc, e un trifoi cu patru foi ! (fig. 43).

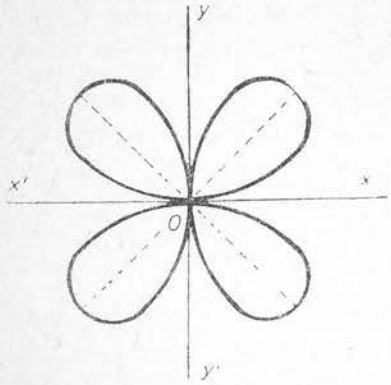


Fig. 43

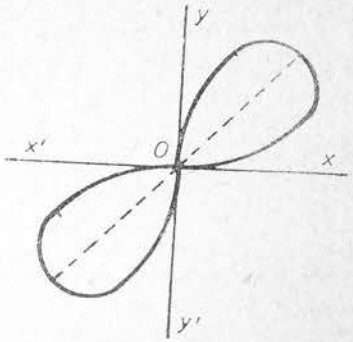


Fig. 44

— Da, şi dacă ecuaţia ar fi fost de forma $(x^2+y^2)^2=xy$, curba, la fel de gingaşă, ar fi avut numai două petale (fig. 44).

— Cu alte cuvinte, i-ai smuls două petale trifoiaşului meu, numai prin această mică modificare a ecuaţiei ce mi-ai propus-o, adică în loc de $(x^2+y^2)^3$ ai pus $(x^2+y^2)^2$ şi în loc de $27\,x^2y^2$ numai produsul xy.

— Ca să nu mă mai învinuieşti că i-aş fi smuls petalele trifoieşului tău, hai să-i dau o pavăză, care să taie pofta altora să o mai atingă ! Uite ecuaţia ce-ţi propun să-i descoperi chipul : $x^4-y^4=x^2-2y^2$.

— Iată şi curba (fig. 45), seamănă cu o lemniscată, împodobită cu două ramuri care parcă ar fi de hiperbolă dacă n-ar avea acele ondulaţii elegante din preajma axei verticale, ramuri care se întind la infinit, călăuzite, în ambele părţi, de cîte o asimptotă. Mi-aduc aminte de o altă curbă zveltă şi graţioasă, care are însă o singură asimptotă ; parcă ar fi o panglică infinită înnodată şi cu capetele răsfirate-n vînt. Mi se pare că ecuaţia ei este : $x^5+y^5=xy^2$.

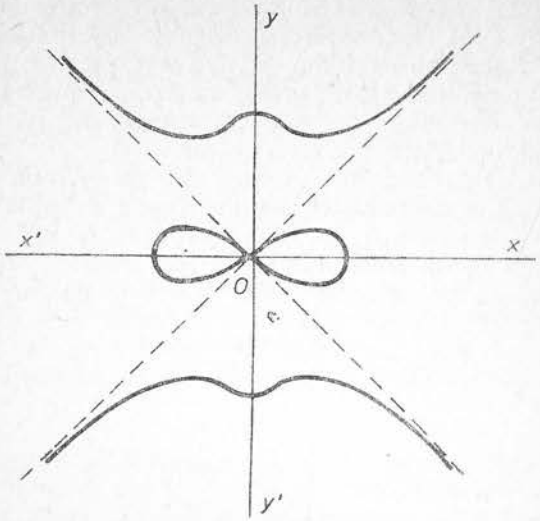


Fig. 45

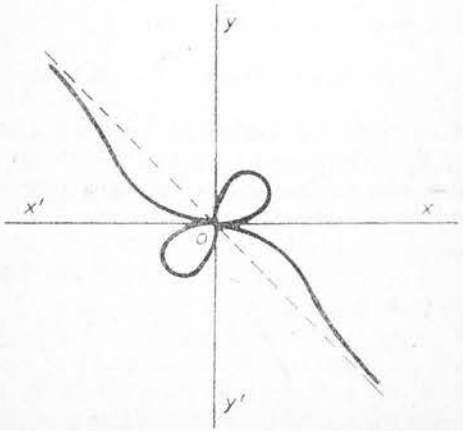


Fig. 46

— Nu o cunosc, dar să încercăm să o construim şi vom vedea (fig. 46). În adevăr, ai dreptate, şi, fiindcă-i tîrziu, şi este vremea să ne oprim, am să-ţi mai prezint spre reprezentare numai o singură curbă, care din cauza formei ei, destul de neobişnuită, se numeşte *trident*. Ecuaţia ei este : $y^3-2xy+1=0$. Aştept să mi-o arăţi !

— Iacă-t-o ! N-a fost ea chiar aşa de uşor de construit, dar cred că te mulţumeşte. Este un frumos exemplu de curbă care are patru ramuri ce se îndepărtează la infinit, două avînd drept ghid, adică asimptotă, axa abscisei, într-un sens şi în celălalt, iar celelalte două, cele două ramuri ale unei parabole (fig. 47). O curbă care te îmbie să o admiri tot

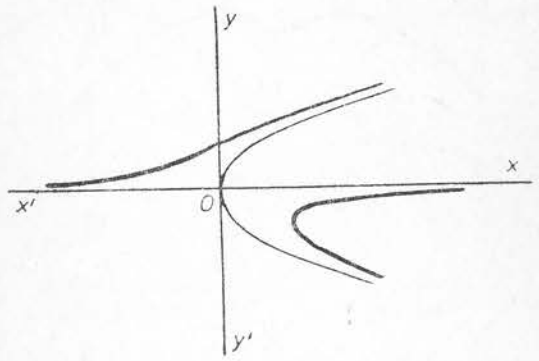


Fig. 47

atît de mult ca şi pe un tablou al lui Mondrian, şi să meditezi asupra ei, ţinînd seama că la infinit cele două extremităţi ale axei xx' se întîlnesc şi tot aşa cele două ramuri ale parabolei !

PĂTRATELE MAGICE

— Data trecută cînd ne-am văzut, mi-ai spus că ai vrea să vorbim despre pătratele magice. Dacă-ţi menţii propunerea sînt gata să-ţi îndeplinesc dorinţa.

— Mă ştii mata că-s în stare să spun azi una şi mîine alta ?

— Atunci află că un pătrat magic de ordinul n este un tablou numeric în formă de pătrat, în care se găsesc n^2 numere, consecutive sau nu, astfel ca suma numerelor de pe o linie să fie egală cu aceea de pe o coloană şi cu aceea de pe cele două diagonale. Această *sumă constantă* se numeşte *numărul magic al pătratului* şi valoarea ei se poate stabili uşor în cazul în care se consideră că pătratul magic de ordinul n a fost construit cu primele n^2 numere. În acest caz, suma acestor n^2 numere este :

$S_{n^2} = \frac{(1+n^2)\,n^2}{2}$ şi împărţind-o la numărul n al rîndurilor (ori a coloanelor) pătratului, *constanta* sau *numărul magic* al unui pătrat de ordinul n este $= \frac{(1+n^2)\,n}{2}$.

— În adevăr, pătratul magic care se afla gravat de Dürer în tabloul său *Melancolia*, era de ordinul patru şi deci constanta lui trebuia să fie 34. Dar de unde le vine numirea de *pătrate magice ?*

— Numirea este foarte veche şi se pare că provine din Orientul îndepărtat. Înaintea erei noastre, astrologii din India, din China şi apoi, începînd cu secolul al VII-lea, astrologii de cultură arabă le-au construit ca talismane, şi le-au atribuit anumite puteri magice, puteri corespunzătoare planetelor de care depindeau. Astfel, pătratele de ordinul trei

erau dedicate planetei Saturn, cele de ordinul patru lui Jupiter, cele de ordinul cinci lui Marte, de ordinul şase Soarelui, de ordinul şapte lui Venus, de ordinul opt lui Mercur şi, în fine, pătratele de ordinul nouă Lunii. Gravate pe plăci metalice, erau purtate ca amulete de acei cărora le erau destinate.

— În adevăr, atunci Soarele şi Luna făceau parte din suita planetelor, iar Lunii ca cea mai mare şi mai apropiată de Pămînt, considerată, probabil, ca cea mai influentă, trebuia să i se dedice şi cel mai mare pătrat magic! Nu înţeleg însă, de ce pătratele magice începeau de la ordinul trei şi nu de la doi?

— Foarte simplu, fiindcă cu patru numere consecutive nu se poate forma un pătrat magic. Iată un motiv serios ca pătratul a patru numere să fie simbolul materiei imperfecte formată din cele patru elemente: aerul, pămîntul, focul şi apa! În Europa, unde ele au ajuns în timpul Renaşterii, odată cu traducerea scrierilor arabe, erau în mare cinste şi, natural, la modă începînd din secolele al XIV-lea şi al XV-lea înainte. Aşa se explică şi prezenţa unui pătrat magic în tabloul lui Dürer. Dar foarte interesant este faptul că matematicianul francez De la Hire, care a trăit pe la sfîrşitul secolului al XVII-lea şi începutul celui următor, a descoperit la Biblioteca naţională din Paris un manuscris din veacul al XIV-lea, despre pătratele magice, scris în limba greacă, de către un cunoscut matematician bizantin care trăia pe atunci, anume Manuel Moscopolos. Autorul a dedicat lucrarea sa unui alt savant contemporan, Nicolae Artaveţ, din Smirna, cunoscut şi sub numele de Rabdas. De la Hire a tradus acest manuscris în limba franceză şi l-a publicat în 1705, împreună cu un studiu personal asupra acestui subiect. Mai tîrziu, acest manuscris a fost examinat şi de Paul Tannery, binecunoscutul cercetător al istoriei matematice şi el a stabilit, mai întîi, că în manuscrisul lui Moscopolos nu-i nici o urmă prin care să arate că el a fost scris sub influenţa scrierilor arabe şi apoi, că Moscopolos nu se referă la nici un fel de *semnificaţie magică* sau *de talisman* a pătratelor magice. El nu foloseşte nici numirea de *pătrat magic*, ci pe aceea de *pătrat aritmetic* (tetragonon arithmon). Cercetînd metoda de formare a acestor pătrate numerice, Moscopolos este primul care a stabilit că *nu există*

o metodă generală de a le forma pentru oricare valoare ar avea numărul *n*. El a arătat că, *dacă n este impar*, atunci se poate găsi o metodă generală de construire, iar *dacă n este par*, există o metodă care să permită numai construirea pătratelor de ordin dublu-par, adică a numerelor ce se divid cu patru, dar nu a dat decît exemple particulare pentru pătratele de ordin impar-par, adică de forma 6, 10, 14 ... $(4n+2)$. Această descoperire a lui Tannery ar putea duce la concluzia că şi grecii au considerat problema pătratelor magice ca pe un divertisment aritmetic, dar pînă acum nu s-a putut descoperi vreun manuscris de origine greacă, mai vechi, care să confirme această ipoteză. Păstrînd denumirea, *dar lăsînd deoparte orice atribut magic*, pătratele magice au format un obiect de delectare al matematicienilor francezi din secolul al XVII-lea, apoi şi al altor mari matematicieni din secolul al XVIII-lea, ca, de pildă, Euler şi Benjamin Franklin [35], ca să nu mai vorbesc că ele au rămas la modă pînă în vremea noastră şi, în multe reviste de „Recreaţii matematice" au o rubrică rezervată.

— Nu prea înţeleg eu, cum ar mai putea stîrni şi acum interes şi curiozitate o problemă care a fost rezolvată în mod general? Căci după cîte mi-ai spus, metoda de construire a pătratelor magice de ordin impar a fost stabilită şi, în parte şi cea a pătratelor magice de ordin par.

— Nu numai în parte, ci, acum, complet.

— Atunci?

— Ei vezi? Au ele farmecul lor, pe care ai să-l descoperi abia după ce vom catadicsi să le cercetăm mai îndeaproape şi nu să ne mulţumim numai cu generalităţi.

— Atunci să trecem la o cercetare mai amănunţită a lor! Prima întrebare este să stabilim condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească cele n^2 numere, în aşa fel ca ele să formeze un pătrat magic. Mai întîi n condiţii care să reprezinte faptul că suma celor n numere care se află într-o linie oarecare a pătratului este constantă şi egală cu *numărul magic*, apoi alte n condiţii corespunzătoare sumelor formate de numerele de pe coloane şi, în fine, 2 condiţii legate de suma numerelor de pe diagonale. Aşadar, în total $2n+2=2(n+1)$ ecuaţii din care trebuie să se determine valorile a n^2 necunoscute. Prin urmare, problema este nedeterminată căci dacă $n \geqslant 3$ atunci $n^2 > 2(n+1)$.

— Numai pentru $n>3$, căci pentru $n=3$ numărul ecuațiilor este egal cu al necunoscutelor.

— Nu văd cum se poate asta, fiindcă $3^2=9$ iar $2 \cdot 4=8$?

— Se poate, dacă cele $n^2=9$ numere nu-s luate la întîmplare, ci în mod consecutiv. Așa ele trebuie să mai îndeplinească o condiție, anume să fie în progresie aritmetică ; avem deci 9 ecuații cu 9 necunoscute.

— Atunci înseamnă că nu există decît *un singur* pătrat magic de ordinul trei ?

— Dacă alegem numerele de la 1 la 9 da, dar dacă preferăm alte numere, atunci lucrurile se schimbă, și de fiecare dată se calculează constanta pătratului corespunzător. Însă, dacă avem în vedere pătratele magice de ordinul patru există cel puțin 880. Ele au fost toate construite în secolul al XVII-lea de Bernard Frénicle de Bassy din Paris, un mare pasionat de probleme de aritmetică, prieten cu Pierre Fermat, care trăia în Toulouse și cu care era în corespondență. Cît privește pătratele de ordinul cinci, numărul lor depășește 50 000, ale celor de ordinul șase sînt peste 4 000 000, peste 400 000 000 este numărul pătratelor magice de ordinul șapte ș.a.m.d. Fermat a stabilit de altfel o formulă care determină numărul lor în funcție de ordinul pătratului.

— În acest caz, e de înțeles de ce pătratele magice nu au încetat să delecteze pe cei îndrăgostiți de jocul cu numerele, fiindcă la condițiile obligatorii ca să se formeze un pătrat magic, de un ordin mai mare decît trei, se mai pot impune încă *diferite alte condiții particulare*, proprii numai unor anumite pătrate de acel ordin. Dar, deși știu atîtea lucruri despre pătratele magice, nu mă pot lăuda că aș putea construi efectiv nici măcar singurul pătrățel de ordinul trei ! N-ai vrea mata să mă inițiezi în această taină ?

— Cu drag, dar mai întîi să-ți spun și cîteva proprietăți generale ale acestor pătrate, de care poate va trebui să te folosești :

1. Un pătrat magic își păstrează proprietatea dacă se mărește sau se micșorează, dacă se înmulțește sau se împarte, fiecare dintre numerele conținute în pătrat cu același număr. Această proprietate, de altfel evidentă, arată de ce se preferă primele n^2 numere și nu altele, atunci cînd sînt consecutive.

2. Dacă se adună sau se scad elementele corespunzătoare din două pătrate magice, se obține tot un pătrat magic.

— Cred că în acest caz cele două pătrate trebuie să fie de același ordin, nu?

— Nu, ordinul lor este indiferent, căci dacă nu sînt de același ordin, se pot aduce la același ordin, completînd în pătratul de ordin mai mic elementele din liniile și coloanele care lipsesc cu zerouri.

3. Un pătrat magic, își păstrează proprietatea dacă se permută între ele două linii și două coloane *simetrice față de linia și coloana mediană* a pătratului considerat. Este necesară această restricție, căci numai așa și elementele de pe diagonale nu se schimbă, ci se permută între ele.

În cartea pe care Bachet de Méziriac a publicat-o în 1612 cu titlul : *Probleme plăcute și încîntătoare care se rezolvă prin numere* a arătat cum se construiesc în mod practic pătratele magice de ordin impar. Să aplicăm deci metoda sa, ca să construim, concomitent, un pătrat de ordinul trei și altul de ordinul cinci. Mai întîi se desenează pătratele, împărțite respectiv în 9 și 25 căsuțe, iar pe fiecare latură se adaugă, în exterior, punctat, în formă de scară, alte pătrate, de aceeași mărime ca și căsuțele interioare (fig. 48 și 49). În felul acesta s-au format trei, respectiv, cinci linii oblice paralele cu diagonalele duse de jos în sus și de la stînga la dreapta. În căsuțele acestor linii oblice se înscriu, începînd de la punctul cel mai de jos al primei linii oblice, numerele consecutive de la 1 la 9 și respectiv de la 1 la 25. În felul acesta se observă că suma numerelor de pe cele două diagonale din interiorul pătratelor este egală cu constanta magică a pătratului respectiv : $4+5+6=8+5+2=15$ și, tot așa ; $11+12+13+14+15=23+18+13+8+3=\frac{(1+25)5}{2}=65$.

— Înseamnă că numerele de pe diagonalele pătratelor sînt gata așezate. Dar cum se introduc celelalte numere ca să îndeplinească condiția cerută ?

— Regula indicată de Bachet de Méziriac este următoarea : „orice număr din exteriorul pătratului se transmite în interior, în aceeași linie sau coloană pe care se află el,

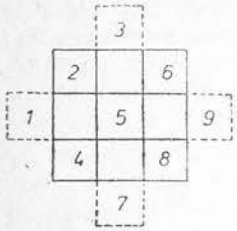


Fig. 48

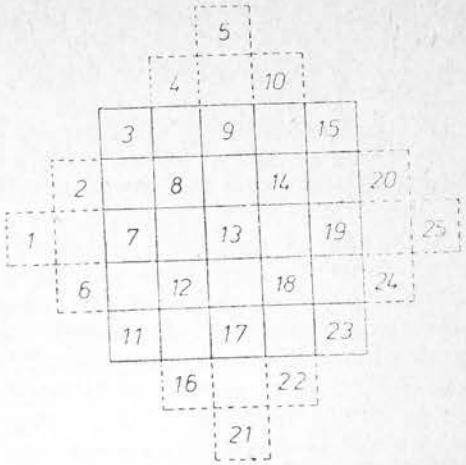


Fig. 49

la o depărtare de atîtea căsuţe cît este ordinul pătratului magic respectiv". În cazul nostru depărtarea este de 3 căsuţe, respectiv 5 căsuţe. Aşadar, în primul pătrat numărul 1 urmează lui 5 şi numărul 9 se aşază în faţa lui 5, la fel numărul 3 vine sub 5, iar 7 deasupra lui 5. În cel de-al doilea, 1 se aşază după 13, iar 25 înaintea lui 13, 2 după 14, 20 înaintea lui 8, iar 21 între 8 şi 14 etc.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fig. 50

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Fig. 51

— Această metodă permite să se formeze un singur pătrat magic de orice ordin impar, dar nu ne dă posibilitatea de a forma *oricîte* pătrate magice am vrea, pentru acelaşi număr *n* impar, or, după cum am văzut, numărul lor este foarte mare. Nu mai există şi vreo altă metodă, care să aibă această calitate ?

— Ba da, există încă o metodă, bazată pe proprietatea de sumare a două pătrate magice, imaginată de Philippe de la Hire, pătratele auxiliare obţinîndu-se fără multă bătaie de cap. Iată un exemplu : să presupunem că pătratul ar avea ordinul 7, aşadar în el trebuie să apară tabloul pătrat al celor 49 de numere de la 1 la 49, aşezate pe 7 linii şi 7 coloane. Să-l scriem deocamdată păstrînd ordinea normală a numerelor :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29...						

În locul acestui amplu tablou, De la Hire a scris un altul, mai simplu, format numai din prima linie, căreia i-a adăugat încă o linie care cuprinde seria numerelor în progresie aritmetică, *cu raţia 7*, începînd cu 0 şi terminînd cu 42 = (49—7) :

1	2	3	4	5	6	7
0	7	14	21	28	35	42

fiindcă el a observat că prin împerecherea şi adunarea numerelor din aceste două rînduri se obţin toate numerele de la 1 la 49, scrise în tabloul de sus.

— Idee ingenioasă, dar încă nu văd cum va putea-o folosi ?

— Punînd faţă-n faţă posibilităţile de adunare, ale perechilor de numere din cele două rînduri. Mai întîi ca să se obţină toate numerele de la 1 la 49, şi apoi ca acestea să fie aşezate în pătratul magic !

— Simplu de spus, dar *practic* cum se realizează aceasta? Drept să-ţi spun, oricît mi-aş bate capul nu întrezăresc nici o cale !

— De aceea nu eşti De la Hire ! El a găsit-o şi iată cum : Se formează un prim pătrat magic de ordinul 7 numai cu numerele din prima linie, dacă se bagă de seamă ca nici o linie sau coloană să nu cuprindă două numere la fel. Or, aceasta este posibil în nenumărate moduri, dacă în prima linie se aşază cele 7 numere fără nici o ordine, adică la întîmplare. Abia în liniile următoare intervine restricţia care constă în aceea că fiecare din liniile ce urmează

3	5	1	2	6	4	7
6	4	7	3	5	1	2
5	1	2	6	4	7	3
4	7	3	5	1	2	6
1	2	6	4	7	3	5
7	3	5	1	2	6	4
2	6	4	7	3	5	1

Fig. 52

7	21	0	14	35	42	28
14	35	42	28	7	21	0
28	7	21	0	14	35	42
0	14	35	42	28	7	21
42	28	7	21	0	14	35
21	0	14	35	42	28	7
35	42	28	7	21	0	14

Fig. 53

şi

10	26	1	16	41	46	35
20	39	49	31	12	22	2
33	8	23	6	18	42	45
4	21	38	47	29	9	27
43	30	13	25	7	17	40
28	3	19	36	44	34	11
37	48	32	14	24	5	15

Fig. 54

să înceapă cu *primul număr care se află după cel din mijloc în rîndul de mai sus* (fig. 52). Astfel, nici un număr nu se repeta nici pe linie, nici pe coloană şi nici pe diagonală şi deci suma lor rămîne aceeaşi, egală cu $\frac{1+7}{2}\cdot 7=28$. Aceeaşi regulă se aplică şi pentru al doilea pătrat magic, numai că se ia drept prim număr din rîndurile următoare *chiar numărul din mijloc* al liniei de sus. Constanta lui este : $\frac{0+42}{2}\cdot 7=147$ (fig. 53). Ţinînd seama de proprietatea de adunare a pătratelor magice, se va obţine pătratul magic de ordinul 7, avînd drept constantă suma $28+147=175=\frac{(1+49)}{2}\cdot 7$, în care, dat fiind condiţiile impuse pătratelor auxiliare, nici un număr nu poate apărea de două ori în vreuna din linii, coloane sau diagonale (fig. 54).

— Este cu adevărat o metodă foarte frumoasă, căci lăsîndu-se posibilitatea de a aşeza oricum numerele din primul rînd, rezultă că primul pătrat poate avea 5 040 de forme diferite — atît fiind numărul permutărilor de 7 elemente. Adunîndu-l în toate modurile posibile cu fiecare din cele 5 040 de pătrate de al doilea fel, se ajunge astfel la milioanele de pătrate de ordinul al 7-lea !

Dar, după acest pătrat destul de impozant, să ne întoarcem ca să aplicăm metoda lui De la Hire şi pătratului de ordinul trei. În acest caz, tabloul celor două şiruri de numere, este :

1	2	3
0	3	6

Pătratele auxiliare (fig. 55 şi 56) odată scrise, le adun ca să găsesc pătratul final (fig. 57). Fie deci :

— Ei vezi ? Te-am lăsat de capul tău şi iată la ce rezultat ai ajuns ! Nici unul dintre pătratele pe care le-ai scris nu erau magice şi totuşi ai continuat !

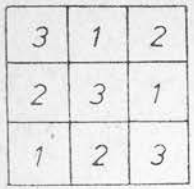


Fig. 55

și

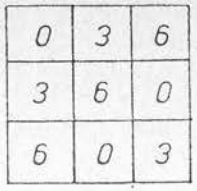


Fig. 56

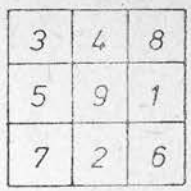


Fig. 57

— Am văzut, dar m-am dus și eu înainte, eram curios să văd unde ajung ? Cum se poate explica acest eșec ? Doar am respectat instrucțiunile, întocmai !

— Le-ai respectat, numai că fiind de toate doar trei elemente, atunci cînd ai făcut permutările, în prima configurație pe care ți-ai ales-o, numărul 3 a rămas pe diagonală, iar în cea de-a doua, numărul 6 ! Trebuia să alegi o altă ordine, de pildă, 2, 3, 1 pentru primul pătrat și 0, 6, 3 în cel de-al doilea.

— Atunci să-mi încerc norocul din nou !

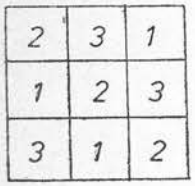


Fig. 58

și

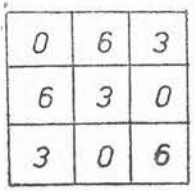


Fig. 59

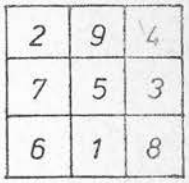


Fig. 60

— Da, am regăsit pătratul cunoscut, în care liniile sînt schimbate în coloane. Acum, sînt tare curios să văd cum se construiesc pătratele de ordin par. În special doresc să pot reface pătratul magic din tabloul lui Dürer.

— De la Hire dă o regulă pentru pătratele de ordin par, de *felul dublupar*, adică de ordinul 4, 8... $4n$. După cum vezi, aici intră și pătratul pe care ți-l dorești. Regula nu diferă de cea de la pătratele impare decît prin cîteva modificări.

— Adică se pornește tot de la tabloul format din cele două șiruri ?

— Exact. În cazul acesta ele sînt :

1	2	3	4
0	4	8	12

Însă, numerele din cele două pătrate auxiliare se repartizează *după alt criteriu* : În primul pătrat, numerele din prima linie se așază așa fel ca, în căsuțele simetrice față de verticala din mijloc, să se afle numerele echidistante din progresia aritmetică, în cazul nostru 1—4 și 2—3. Alegerea lor rămîne la voia ta. În cel de-al doilea pătrat, aceeași regulă se aplică la numerele din coloana întîi. Apoi, în primul pătrat, în linia a doua se scriu numerele din prima linie în ordinea inversă și celelalte două linii sînt formate din liniile de deasupra, scrise așa ca să fie simetrice față de linia orizontală mediană. La al doilea pătrat aceleași reguli, observate față de coloane.

— Bine, acum să privesc pătratul lui Dürer : primele lui două numere sînt 16 și 3. Asta-mi spune să aleg distribuția 4, 3, 2, 1 pentru prima linie (fig. 61) și 12, 4, 8, 0 pentru prima coloană (fig. 62). În rest mă voi conforma instrucțiunilor :

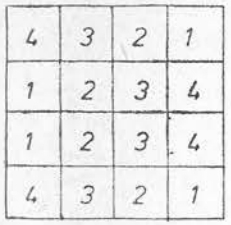


Fig. 61

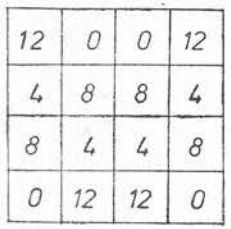


Fig. 62

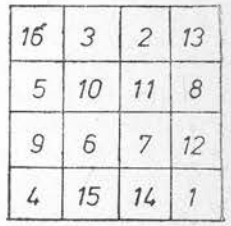


Fig. 63

— Sînt foarte mulțumit că am găsit pătratul lui Dürer, am impresia că m-am întors cu exact 469 de ani în urmă și-l văd pe acest mare îndrăgostit de pictură și de matematică, cum stă cu pana în mînă și socotește și iar socotește, iar apoi, ca să se mai odihnească, ia un cuțit și își ascute penele de gîscă ce stau pe masa lui. Oare ce reguli va fi întrebuințat el ca s-o scoată la capăt ? Că aceasta a lui De la Hire avea să mai aștepte vreo 136 de ani pînă să se nască autorul ei.

— Îi fi tu mulţumit cu cele ce ai realizat, nu te contrazic, dar eu nu-s mulţumit, fiindcă deşi pătratul l-ai găsit întocmai, ai trecut pe lîngă el fără să-l priveşti în adînc ! De pildă, te-ai uitat la cele două numere alăturate, de pe ultima linie ? Nu. Ai scris doar 15 şi apoi 14, dar dacă le priveai, o singură clipă numai, ele ţi-ar fi spus : 1 514, anul cînd Dürer a executat gravura !

— Adevărat, Bădie, *numai gura-i de mine*, mi-ai spus mata odată cînd eram mic, şi văd că ai avut dreptate !

— Ei, acuma exagerezi şi tu, mai bine uită-te din nou la pătrat, poate vezi măcar acum şi altceva interesant.

— Interesant este însuşi faptul că a pus asemenea condiţii numerelor, obligîndu-le cum să fie distribuite. Dar dacă mă uit mai bine, observ că suma numerelor din colţurile opuse este aceeaşi : $16+1=13+4=17$ şi apoi, *aceeaşi sumă* se obţine dacă din centrul pătratului duc 8 linii care să lege căsuţele opuse din liniile şi coloanele unu şi patru, şi anume : $3+14=2+15=5+12=9+8=17$.

— Nu-i întîmplătoare, ci reprezintă o proprietate a unor anumite pătrate de ordinul patru numită *proprietatea* sau *condiţia de echilibru*. Condiţia aceasta este chiar necesară atunci cînd se construiesc *pătratele magice cu bordură* sau cu *margine*. Ele sînt astfel construite încît, lăsînd marginea deoparte, sau marginile dacă sînt mai multe, pătratul care rămîne să fie tot magic. Pierre Fermat era un mare amator de pătrate magice. La moartea lui s-au găsit 14 caiete şi multe alte foi detaşate, umplute cu pătrate magice şi, după cum ştii prea bine, el era foarte zgîrcit cu hîrtia, aşa că îţi închipui cîtă bogăţie se afla adunată acolo ! Într-o scrisoare a lui către Mersenne se găseşte un pătrat magic care are ordinul 12, alături de care observaţia : „Pătratul acesta nu-i complet, fiindcă nu am timp să-l termin pînă ce pleacă curierul. El mai cuprinde încă cinci benzi exterioare compuse în aşa fel încît pătratul de ordinul 22 care se formează să fie tot magic."

— În adevăr, adăugîndu-i cinci benzi exterioare, pătratul format are cîte $12+10$ numere pe latură, adică este de ordinul 22. Dar prin ce procedeu se poate alcătui un atare pătrat, să zicem unul de ordinul 6, pornind de la cel de ordinul patru, de pildă chiar de la pătratul lui Dürer ?

— Tehnica nu-i prea complicată. Trebuie să se folosească proprietatea numerelor echidistante. În acest scop se scriu cele $6 \cdot 6=36$ numere care vor intra în compoziţia pătratului pe două rînduri aşa, ca să se pună în evidenţă, adică unele sub altele, *perechi de numere echidistante*, care au drept sumă numărul 37 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Dintre aceste numere se aleg, la întîmplare, 8 perechi consecutive, cu care se formează un pătrat magic de ordinul patru. Şi fiindcă vrei ca acela să fie pătratul lui Dürer, să punem în corespondenţă primele 16 numere care sînt în acel pătrat cu cele 16 numere compuse din cele 8 perechi destinate de noi pătratului ce avem să-l formăm, ca apoi să le preschimbăm.

— Atunci să alegem primele 8 perechi. Ce fac cu aceste numere ?

— Le scrii, unele după altele, într-un singur şir, şi dedesubt numerele de la 1 la 16, apoi înlocuieşti pe acelea din pătratul lui Dürer cu numerele corespunzătoare din primul rînd (fig. 64).

36	3	2	33
5	30	31	8
29	6	7	32
4	35	34	1

Fig. 64

— Avem deci :

1 2 3 4 5 6 7 8 29 30 31 32 33 34 35 36
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Înlocuind, se obţine pătratul în care suma magică este 74 şi nu 34 ca la pătratul original, fiindcă numerele noi, intro-

duse diferă de cele vechi cu 20 (36—16=35—15 etc). Ca să trecem de la acest pătrat la cel de ordinul 6, a cărui constantă magică este $\frac{(1+36)}{2}\cdot 6 = 111$, înseamnă ca pe fiecare linie, coloană şi diagonală să se adauge două numere a căror sumă să fie 111—74=37. Or, după cum am observat, suma a două *numere echidistante* este tocmai 37, ceea ce arată că perechile de care avem nevoie sînt gata formate. Se aleg, oricum două perechi, care se aşază în colţurile noului pătrat ca să se completeze diagonalele. Fie, de pildă, perechile 18—19 şi 17—20. Tot cu numere echidistante trebuie să completăm liniile 1 şi 6, precum şi coloanele 1 şi 6. Acum însă trebuie să ţinem seama de faptul că am introdus numerele de la colţuri şi să calculăm constantele magice corespunzătoare liniilor şi coloanelor respective. Avem, pentru

linia 1 : 111—35=76
linia 6 : 111—39=72
coloana 1 : 111—36=75
coloana 6 : 111—38=73

După cum se observă, 76+72=75+73, urmează că şi acum trebuie alese perechi de numere echidistante pentru completarea liniilor şi a coloanelor. Aceasta se poate face astfel : (fig. 65)

17	23	22	21	10	18
11	36	3	2	33	26
12	5	30	31	8	25
28	29	6	7	32	9
24	4	35	34	1	13
19	14	15	16	27	20

Fig. 65

linia 1 : 23+22+21+10=76
linia 6 : 14+15+16+27=72
coloana 1 : 11+12+28+24=75
coloana 6 : 26+25+ 9+13=73

— Numărul pătratelor magice astfel construite este şi el foarte mare, căci avem libera alegere atît a perechilor ce intră în bandă, cît şi a acelora care sînt destinate să formeze pătratul interior. Dar dacă ar fi să mai adaug o bandă, cum s-ar proceda, la fel ?

— Desigur. El ar fi de ordinul 8, aşadar ar cuprinde 8·8=64 numere. Din 8 perechi consecutive se construieşte primul pătrat de ordinul 4, apoi cu alte 10 perechi consecutive se construieşte prima margine şi cu cele 14 perechi care au mai rămas se formează a doua margine. Trebuie doar să observi că, în acest caz, suma a două numere perechi este 1+64=65 şi să calculezi constantele magice ale celor trei pătrate consecutive.

— Pentru pătratele magice de ordin impar, cred că metoda nu poate fi de folos, fiindcă numerele echidistante nu se mai pot grupa în perechi.

— De ce nu ? De pildă, dacă-i vorba de un pătrat de ordinul 5 cu margine, cele 25 de numere se pot împerechea în felul următor :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14

În pătratul interior, care-i de ordinul 3 se folosesc numerele de la 9 la 17, aşa că pentru margine rămîn celelalte 8 perechi !

— Iată un asemenea pătrat magic de ordinul trei care are trei borduri magice. El a devenit astfel întîi un pătrat magic de ordinul 5, apoi de ordinul 7 şi la urmă un pătrat magic *mărginit* de ordinul 9 (fig. 66). [36]

Dar, în cazul pătratelor magice de ordin impar, o admiraţie deosebită a fost stîrnită de un pătrat magic de ordinul 9 compus din 9 pătrate magice de ordinul 3 alipite unele de altele, cu alte cuvinte, un *pătrat magic în compartimente* sau un pătrat *hipermagic.*

2	11	12	13	77	78	79	81	16
6	18	27	26	61	62	65	28	76
7	59	30	35	51	53	36	23	75
8	58	32	38	45	40	50	24	79
73	57	49	43	41	39	33	25	9
72	22	48	42	37	44	34	60	10
68	19	46	47	31	29	52	63	14
67	54	55	56	21	20	17	64	15
66	71	70	69	5	4	3	1	80

Fig. 66

— Nostimă idee, m-ar tenta grozav să o văd materializată !

— Nimic mai simplu : cele $9 \cdot 9 = 81$ numere se despart parcă de la sine în grupe de cîte 9 numere consecutive așezate în progresie aritmetică, avînd aceeași rație $= 9$, din care se poate forma cîte un pătrat magic de ordinul trei, fiecare avînd, bineînțeles, altă constantă magică. Aceste 81 de numere care trebuie distribuite în cele 9 pătrate, le putem scrie astfel :

Pătratul *1* : 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73 ; $C_1 = 111$
Pătratul *2* : 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74 ; $C_2 = 114$
Pătratul *3* : 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75 ; $C_3 = 117$
Pătratul *4* : 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76 ; $C_4 = 120$
Pătratul *5* : 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77 ; $C_5 = 123$
Pătratul *6* : 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78 ; $C_6 = 126$
Pătratul *7* : 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79 ; $C_7 = 129$
Pătratul *8* : 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80 ; $C_8 = 132$
Pătratul *9* : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 ; $C_9 = 135$
1 2 3 4 5 6 7 8 9

— Observ că și constantele $C_1 \ldots C_9$ formează o progresie aritmetică ca rația 3 și aceasta ușurează mult operațiile ce le avem de făcut, deoarece se poate forma *un pătrat magic de ordinul 3 cu aceste constante.* Constanta acestui pătrat este chiar constanta pătratului de ordinul 9, adică $\frac{1+81}{2} \cdot 9 = 369$. Prin urmare, sub formă restrînsă, pătratul căutat este chiar pătratul magic al constantelor. Nu ne rămîne decît să dezvoltăm aceste pătrate și, în acest scop, rîndul scris dedesubtul tabloului (T) poate servi ca mijloc de translație dintre numerele pătratului originar de ordinul 3 și acelea din care se vor compune fiecare dintre cele 9 pătrate magice corespunzătoare constantelor lor. De altfel și pătratul magic al constantelor reprezintă o traducere a pătratului nostru de ordinul 3, unde în loc de 2 pun C_2, în loc de 7 scriu C_7 etc. (fig. 67). Iată deci rezultatul (fig. 68) :

C_2	C_7	C_6
C_9	C_5	C_1
C_4	C_3	C_8

Fig. 67

11	56	47	16	61	52	15	60	51
74	38	2	79	43	7	78	42	6
29	20	65	34	25	70	33	24	69
18	63	54	14	59	50	10	55	46
81	45	9	77	41	5	73	37	1
36	27	72	32	23	68	28	19	64
13	58	49	12	57	48	17	62	53
76	40	4	45	39	3	80	44	8
31	22	67	30	21	66	35	26	71

Fig. 68

— Mă întreb, oare s-ar putea forma un *pătrat hipermagic* de ordinul 8 ? El ar trebui lucrat din $8 \cdot 8 = 64$ nu-

mere, aşadar descompus în patru pătrate magice alăturate, fiecare de ordinul patru. Or, fiind vorba de pătrate de ordin par, se vor folosi cele 32 de perechi echidistante repartizate în 4 serii de cîte 8 perechi fiecare. Cred că într-o zi am să-l încerc şi am să vin cu el la mata. Acum mă zăhăie un alt pătrat, tot de ordinul 8, despre care nu prea ştiu mare lucru şi tare aş vrea să-l cunosc mai îndeaproape. E vorba de *pătratul construit de Euler* în legătură cu *poziţiile calului de pe tabla de şah.*

— De fapt, problema aceasta a fost rezolvată de două ori mai înainte de a fi atacată de Euler, numai că aceasta nu s-a aflat decît mult după ce Euler a dat soluţia sa. Povestea e cam aşa : La invitaţia lui Frederic cel Mare, regele Prusiei, Euler a părăsit Rusia ca să fie preşedintele Academiei de Ştiinţe din Berlin. În această calitate, deşi nu-i făcea nici o plăcere, era obligat să asiste la serbările de la Curte şi să ia parte la discuţiile ştiinţifice care aveau loc. Cum jocul de şah era nelipsit de la aceste reuniuni, iar drumul pe care-l urma calul fascinase de multă vreme pe şahişti, curtenii, profitînd de ocazie că au în mijlocul lor un asemenea matematician de geniu, i-au propus să stabilească el, în mod teoretic, drumul pe care trebuie să-l parcurgă un cal pe tabla de şah, astfel ca el să străbată toate cîmpurile fără a trece de două ori prin acelaşi loc. Curtenii căutau să stabilească soluţiile în mod empiric, de pildă, acoperind tabla cu 63 de fise şi ridicînd treptat numai acele fise care se aflau pe pătratul ce-l ocupa atunci calul. Dacă fisele erau numerotate, atunci ele erau aşezate în aşa fel ca să indice poziţiile consecutive şi astfel să se deosebească o soluţie nouă de o alta, mai veche. În 1759, Euler a publicat în Memoriile Academiei din Berlin, răspunsul aflat la întrebarea propusă, într-un articol intitulat : „Soluţia unei probleme ingenioase, care nu pare a se supune nici unei analize". Aşa cum ţi-am spus, problema tratată de Euler fusese cercetată şi rezolvată cu mult înainte de era noastră, de pildă, în India. Apoi, prin secolul al XVI-lea se află expusă într-un manuscris din Europa şi, cu vreo jumătate de veac înainte de Euler a fost publicată într-o broşură de cavalerul Montmort din Paris, dar Euler nu a cunoscut aceste lucrări. În introducerea articolului său, el povesteşte cum a ajuns la această problemă şi arată că a discutat-o,

înainte de a-i găsi soluţia, cu prietenii lui, matematicianul francez Louis Bertrand şi cu matematicianul german Christian Goldbach, care se afla atunci în Rusia. Euler a stabilit o metodă generală prin care se pot urmări poziţiile calului pe tabla de şah, şi notînd prin numerele de la 1 la 64 toate poziţiile succesive, el a arătat cum se prezintă aceste poziţii în aşa fel ca el să nu treacă de două ori prin acelaşi loc. Totodată, a precizat că problema are un număr foarte mare de soluţii. Dar, trebuie să-ţi atrag atenţia că tablourile numerice stabilite de Euler, deşi reprezentau pătrate umplute cu $8 \cdot 8 = 64$ de numere, *nu erau pătrate magice.* Această problemă s-a pus ulterior, anume, să se afle un pătrat magic de ordinul 8, avînd *distribuţie cavalerească,* adică să fie construit în aşa fel ca numerele de la 1 la 64 să reprezinte poziţiile succesive ale săriturii calului pe tabla de şah. Apare astfel o nouă şi foarte dificilă problemă legată de formarea pătratelor magice, căci, dacă pînă acum numerele ce umpleau aceste pătrate magice erau supuse numai la condiţia ca suma acelora ce se află pe fiecare linie să fie egală cu suma numerelor de pe fiecare coloană şi de pe cele două diagonale, acum, acestor numere li se mai impune să urmeze o *ordonare dinainte stabilită,* condiţie foarte grea şi care a *cerut zeci de ani de lucru* acelora care au fost atraşi de soluţia ei. Metoda în sine era cunoscută, căci am găsit-o folosită de Bachet, ca să construiască pătratele de ordin impar, anume aşezînd numerele în ordinea lor naturală pe linii paralele cu una dintre diagonale, dar acea *ordonare oblică a elementelor* este cu mult mai simplă decît aceasta cerută de distribuirea cavalerească. Problema generală pare că *este imposibilă* căci după zeci de ani de studiu, Wenzelides şi alţii au realizat cîteva pătrate magice de ordinul 8, cu distribuţie cavalerească, dar în care constanta magică $\frac{1+64}{2} \cdot 8 = 260$ *nu se menţine decît pentru linii şi coloane,* suma numerelor de pe cele două diagonale fiind alta. [37] Iată un exemplu (fig. 69). Acest pătrat *semimagic* are încă şi calitatea de a fi cu *circuit închis,* adică este construit în aşa fel că după ultima săritură a calului (aceea marcată prin căsuţa 64) urmează din nou săritura

47	10	23	64	49	2	59	6
22	63	48	9	60	5	50	3
11	46	61	24	1	52	7	58
62	21	12	45	8	57	4	51
19	36	25	40	13	44	53	30
26	39	20	33	56	29	14	43
35	18	37	28	41	16	31	54
38	27	34	17	32	55	42	15

Fig. 69

de la început, la căsuța unu ! Alături de acesta, iată și alt pătrat de aceeași natură (fig. 70) care l-am putea numi *hipersemimagic*.

1	30	47	52	5	28	43	54
48	51	2	29	44	53	6	27
31	46	49	4	25	8	55	42
50	3	32	45	56	41	26	7
33	62	15	20	9	24	39	58
16	19	34	61	40	57	10	23
63	14	17	36	21	12	59	38
18	35	64	13	60	37	22	11

Fig. 70

— Adică vrei să zici că acest pătrat semimagic este compus din alte patru pătrate, probabil tot semimagice ?

— Da, și că fiecare dintre ele are aceeași constantă magică egală cu 130. [38] Numai că el (fig. 70) nu mai este și *închis* sau cu *circuit închis*.

— Acum, am de gînd să punem capăt acestei discuții cu o surpriză. Erai tare necăjit că nu există decît un singur pătrat magic de ordinul trei. Ca să nu te las cu inima îndoită, am să-ți arăt un pătrat magic de ordinul trei, despre care nu-ți spun nimic, deocamdată (fig. 71). Privește-l și

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Fig. 71

spune tu ce crezi despre el ? După cum te-ai putut convinge, constanta lui magică este 111.

— Mi-ai făcut, cu adevărat, o surpriză, Bădie ! Acest pătrat este format numai din *numere prime*, așa că nu mai respectă nici regula pe care o consideram — acum văd că am greșit — obligatorie, aceea ca numerele să fie consecutive. E foarte simplu. Unde l-ai aflat și cînd ?

— În cartea pe care o prezintă Morris Kline. [36, p. 52] El spune că este pătratul magic de ordinul trei format din numere prime, care are *cea mai mică constantă magică posibilă*. Și, ca o curiozitate, adaugă că un pătrat magic format tot cu numere prime, dar de ordinul al patrulea poate avea numărul 102 drept constanta magică !

— Explicabil, dacă numerele ce-l compun sînt mai mici. Nu s-a încercat un pătrat magic care să cuprindă o grămadă finită de numere prime, însă luate toate unele după altele ?

— Ba da, dar nu pot fi luate *chiar toate*, gîndește-te de ce ?

— De ce ?... În adevăr, *numărul 2* este şi el un număr *prim, dar este par* pe cînd toate celelalte sînt *impare*, aşadar el nu poate fi cuprins în grămada numerelor prime care ar forma un pătrat magic, fiindcă ar împiedica sumele de pe linii să mai fie egale, celelalte numere fiind toate impare.

— Aşadar, cu excepţia numărului 2, cel mai mic pătrat magic care s-a putut construi cu numerele prime consecutive este de ordinul 12.

$C_m = 4514$

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	437	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Fig. 72

— N-aş fi crezut asta ! Abia cu 144 de numere prime s-a putut realiza un pătrat magic ! Cîtă muncă trebuie să se fi depus ca să-l execute, dar şi satisfacţie. Tare aş vrea să-l văd şi eu !

— Uite-l, se află aici la pagina 52 din cartea care o avem pe masă (fig. 72). [36] :

— Ştii ce i-a scris odată Fermat lui Mersenne, despre pătratele magice ? „Nu cunosc nimic mai frumos în *Aritmetică* decît aceste numere pe care unii le numesc *planetarios*, iar alţii *magicos*."

MATEMATICA ŞI ARHITECTURA

În discuţiile noastre, în care căutam matematica ascunsă printre frumuseţile create de artişti, ne-am oprit în treacăt şi asupra arhitecturii. Cred că ar fi timpul să zăbovim mai mult cu întrebările despre matematică şi frumuseţea din arhitectură, ştiut fiind că între aceste două domenii au existat strînse legături din adînca Antichitate. Ce dovadă mai sigură ne trebuie dacă avem exemplul *funiei cu 12 noduri*, anume inventată pentru tiparul unghiului drept ?

— Sînt şi eu de părerea matale, Bădie, numai că în ceea ce priveşte echivalenţa preistorică dintre arhitectură şi artă avem de înlăturat anumite prejudecăţi. Iată, de pildă, ce scrie Eugène Véron, în *Estetica* lui : „Arhitectura a devenit o artă, dar a început prin a fi altceva. Primul om care a avut ideea să-şi sape un adăpost sub pămînt sau să-şi construiască o colibă, desigur că nu s-a gîndit să creeze o operă artistică... Dar prin simplul fapt că o colibă se înfăţişează ochiului ca un ansamblu de linii şi suprafeţe, este de prevăzut că sentimentul înnăscut al artei va sfîrşi prin a-şi manifesta preferinţele dînd acelor linii şi acelor suprafeţe aşezările cele mai plăcute ochiului". [39, p. 105] Şi mai departe, în chip de concluzie : „Arhitectura este cea mai puţin personală dintre toate artele. Căci ea se supune la o mulţime de obligaţii pe care toate celelalte le evită. Înainte de a fi o artă, ea este o meserie, în sensul că aproape întotdeauna i se impune un scop utilitar care-i domină manifestările... *Colosseum*-ul a provocat mai multe manifestări de admiraţie de cînd nu i se văd decît ruinele, decît în timpul cînd se adunau acolo o sută de mii de spectatori ca să asiste la luptele cu gladiatorii... Acelaşi sentiment ne face aşa de severi faţă de arta contemporană ; din cauza utilităţii el dispare. Cînd aceasta se va retrage, arta eclipsată va reapare". [l.c, p. 217—219].

— Nu zic că arhitectura nu a început ca o meserie, dar după aceea ea *a devenit şi acum este o artă*, pentru că arhitectului nu-i este indiferentă impresia pe care o produce creaţia lui asupra celor din jur şi de aceea se sileşte — *nesilit de nimeni* — să realizeze un lucru nu numai *util*, dar şi *cît mai frumos*. Cred că ştii că Herbert Spencer susţinea că frumosul începe prin util şi că adesea frumosul este utilul care şi-a pierdut întrebuinţarea ? Nu-s de părerea lui, dar îţi ofer şi acest argument în favoarea temei ce ţi-am propus-o.

— Mă răsfeţi, Bădie, aducîndu-mi argumente ca să accept subiectul, cînd eu ştiu de mai înainte că în orice propunere de-a matale, surprize neaşteptate îmi vor fi oferite din belşug ! Am admirat şi totodată m-au înfiorat piramidele egiptene prin indestructibila lor masivitate, care parcă vor să spună că viaţa este o scurtă trecere spre repausul etern. Construcţia lor este impregnată de geometrie, dar cum s-a stabilit această sudură nu vom şti niciodată, fiindcă nici papirusul *Rhind*, nici celelalte cîteva fragmente de scrieri matematice ce ne-au rămas de atunci nu pomenesc nimic despre aceasta, cum nu o fac nici miile de tăbliţe de lut ale babilonenilor. Aş prefera de aceea să începem cu arhitectura greacă. Proporţiile clădirilor dovedesc nu numai serioase cunoştinţe matematice, dar şi adînci sentimente estetice. Templele greceşti au redus imensitatea inumană a celor egiptene sau babilonene la proporţia omenească şi prin aceasta le-au făcut să radieze din ele frumuseţea vieţii, bucuria de a trăi.

— Da, consider că una dintre cele mai formidabile calităţi ale artiştilor greci a fost intuiţia lor estetică. Numai aşa au putut reuşi să traducă *anumite sentimente omeneşti* în *anumite rapoarte numerice dintre segmente sau chiar suprafeţe*. Am să mă explic : Prin înfăţişarea lor, templele greceşti — căci mă rezum numai la acestea — se împart în trei ordine : *doric, ionic* şi *corintic*. Fiecare dintre aceste ordine au la bază proporţiile diferite în care s-au executat coloanele, frontonul etc. Să ne uităm, de pildă, la templul lui Poseidon (fig. 73), zeul mărilor, care se pare că a fost construit prin secolul al VI-lea î.e.n. În masivitatea lui se simte ceva din influenţa egipteană şi totuşi sentimentul pe care-l trezeşte este cu totul altul ; o forţă plină de măreţie, de severitate, dar şi de viaţă, care alungă departe gîndul morţii. Înălţimea coloanelor este de aproape şase ori diametrul lor ; ele fac

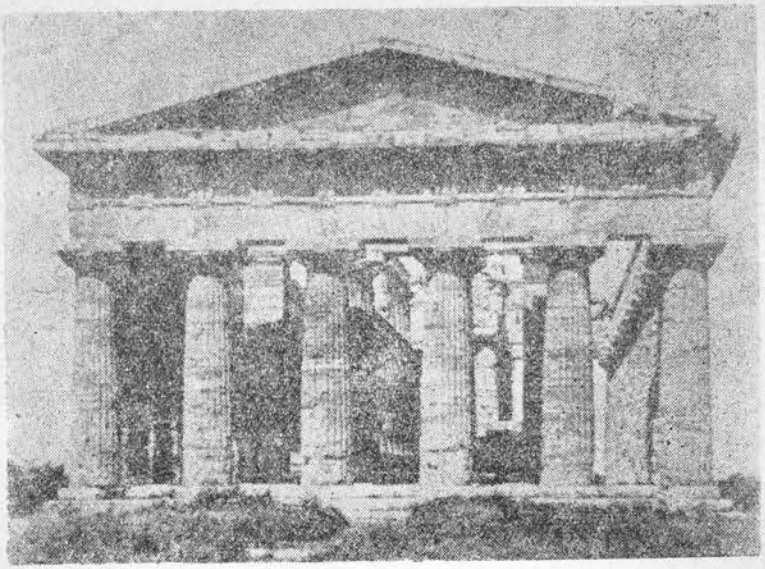


Fig. 73

impresia unor copaci crescuţi din pămînt, nu au nici un ornament la bază, iar capitelul are forma unui colac pe care este aşezată o lespede pătrată şi pe aceasta se sprijină acoperişul templului în pantă. El încadrează un fronton în formă de triunghi isoscel. Sentimentul este altul dacă ne uităm la templul Victoriei de pe Acropola Atenei, aparţinînd ordinului ionic. (fig. 74) Coloanele ei sînt mai zvelte, mai elegante şi dau o anumită impresie de vioiciune. De ce ? Fiindcă s-a schimbat *raportul* dintre înălţimea şi diametrul lor, el fiind cam 9 la 1, adică înălţimea unei coloane este de 8 sau 9 ori decît grosimea ei. În plus, coloanele nu mai răsar direct din pămînt, ci stau pe un piedestal ; acesta este format din 3 sau 4 inele cilindrice, suprapuse, capitelul apare împodobit cu două volute în formă de spirală, amintind de cochilia melcului, iar pe acestea se sprijină acoperişul. Şi dacă ordinul ionic, mai bogat şi mai împodobit decît cel doric, te impresionează prin abundenţă şi eleganţă, ordinul corintic depăşeşte la superlativ aceste însuşiri prin coloanele sale şi mai

Fig. 74

zvelte — de zece ori diametrul lor — şi prin capitelul ornat cu un buchet de graţioase frunze de acant (fig. 75). Dar să mergem mai departe : Deşi arhitectura greacă se caracterizează printr-o serie de calcule riguroase, impuse de întreaga structură a templului, de proporţiile dintre părţile componente, dominate cum am spus altă dată de tăietura de aur, nimic din întreaga clădire nefiind lăsat deoparte şi la întîmplare, *geniul şi libertatea artistului nu-i deloc îngrădită*. El putea să aducă orice modificări rezultatelor pe care le-a stabilit prin calcule, dacă aceste modificări contribuiau la impresia de armonie şi de eleganţă a edificiului. Iată un exemplu surprinzător. Partenonul, templul închinat zeiţei Atena Partenos a fost clădit în *stilul doric* (fig. 76), considerîndu-se că prin caracterul lui grav şi sever acest ordin corespunde cel mai bine falnicei zeiţe. Dar între templul lui Poseidon şi Partenon este o mare deosebire. Măsurătorile făcute în secolul

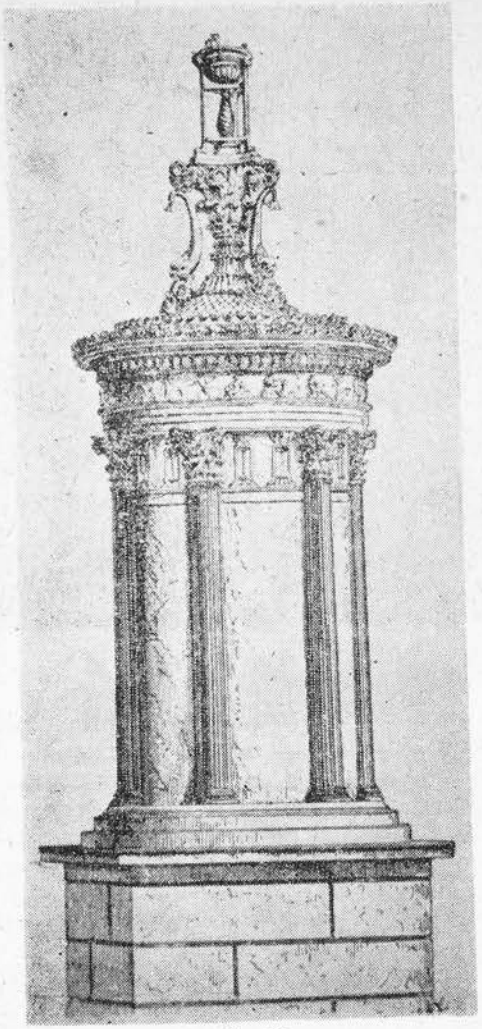


Fig. 75

al XIX-lea au arătat că toate liniile orizontale sînt uşor îngroşate la mijloc, devenind astfel convexe şi tot aşa pereţii şi muchiile verticale descriu o suplă linie concavă. Arhitectul

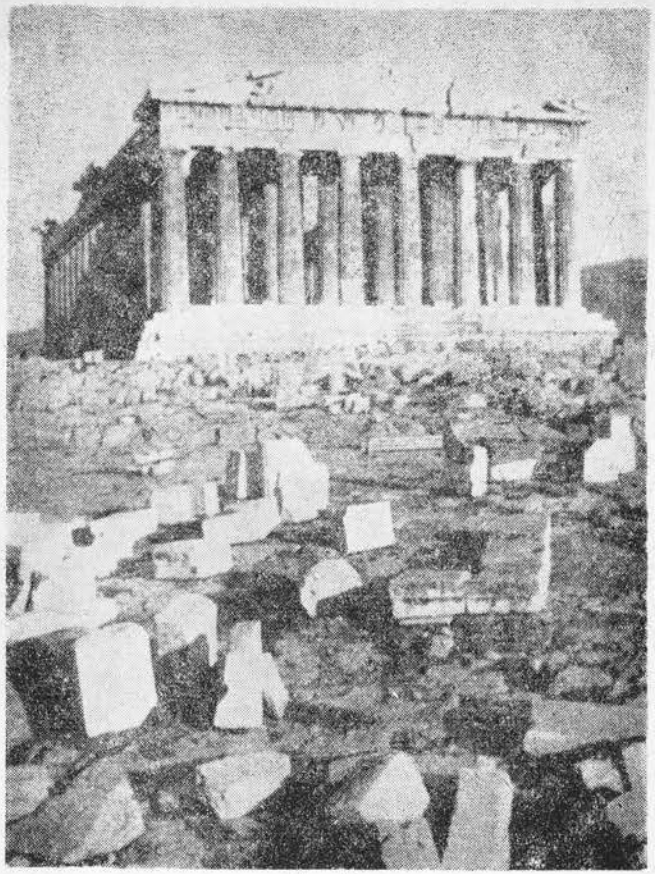


Fig. 76

Ictinus a făcut aceste modificări insesizabile ca să evite impresia de monotonie şi, tot din această cauză, geniul lui Fidias a adăugat decoraţii sculpturale la frize, metope şi pe fronton. Desigur că astfel, la impresia de masivitate şi sobrietate, s-a alăturat una de eleganţă şi armonie, mărind efectul estetic. [39, p. 200]

— Cred că un element nou a fost introdus în arhitectură de către romani, anume *arcul*, respectiv, *bolta* în formă de jumătate de sferă. Nu-i aşa ?

— Da, n-au inventat-o ei, dar au folosit-o cu mult succes. Se pare că ea a apărut mai întîi în Orient. de acolo au luat-o etruscii şi apoi, de la etrusci, a fost însuşită de romani.

— A fost un mijloc foarte eficace de a înlătura monotonia liniilor drepte, orizontale şi verticale. Datorită arcului, scrie Véron, arhitectura romană „a realizat tipul de soliditate tot aşa de absolut ca şi acela la care au ajuns egiptenii cu blocurile lor enorme, dar, în acelaşi timp, au evitat greutatea imobilă a construcţiilor egiptene". [39, p. 203] Eu cred că nu numai pentru soliditate trebuie să-i dăm atenţie acestui *arc în plin cintru,* adică *avînd forma de semicerc,* ci şi pentru că prin folosirea lui romanii şi-au creat un stil propriu şi original, care s-a impus prin forţa şi impresia de măreţie ce o exprimă. Mă gîndesc, de pildă, la *Arcul de triumf,* cu care romanii au cinstit gloria generalilor lor cînd reveneau la Roma încărcaţi de succes. Aceste arcuri de triumf, care exprimă orgoliul forţei triumfătoare, au *o formă geometrică precisă,* plină de armonie şi eleganţă, în care se distinge, pe de o parte suprafaţa laterală a unei jumătăţi de cilindru circular drept şi, pe de alta, volumele paralelipipedice, împodobite cu coloane, de obicei corintice sau cu diferite sculpturi. De atunci şi pînă azi, aceste monumente, legate de amintirea războaielor victorioase, împodobesc pieţele celor mai multe dintre capitalele ţărilor din Europa. (fig. 77)

— Tot printre monumentele de acest gen trebuie să socoteşti şi *Columna lui Traian,* aşa de importantă pentru istoria ţării noastre. Din punct de vedere geometric, este un trunchi de con înalt de 44 m la care se adaugă alte diferite solide ale căror dimensiuni au trebuit să fie calculate în mod riguros, atît pentru stabilitatea coloanei, cît şi pentru estetica ei. Din punct de vedere artistic, importante sînt cele 34 de blocuri de marmură albă pe care sînt sculptate cele peste 3 000 de personaje legate de episoadele victorioase ale împăratului, fără să mai menţionez mulţimea cailor, elefanţilor, armelor, drapelelor, carelor de război ş.a.m.d.

— Şi tot la arhitectura romanilor trebuie amintit *Colosseum-ul,* unul din amfiteatrele cele mai mari din lume. Arena este o elipsă cu axa mare de 200 m şi axa mică de 167 m, iar zidul, de jur împrejur, are formă cilindrică, compus din patru etaje, toate formate din arcade. Etajul prim este for-

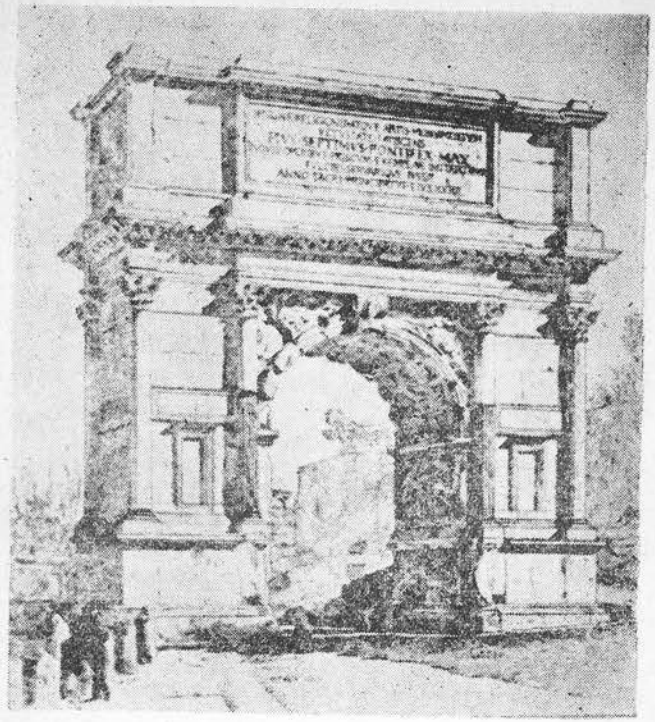


Fig. 77

mat din coloane dorice, masive. Al doilea din coloane ionice, cu capitelurile ornate cu volute. În etajul al treilea coloanele sînt corintiene, iar în cel de-al patrulea, coloanele s-au transformat în nişte groşi stîlpi prismatici. Desigur că acest amestec de stiluri nu ar fi fost posibil în arhitectura greacă, după cum nici suprapunerea unui etaj greu şi masiv peste cele trei inferioare, mult mai suple şi uşoare. Dar iată că inovaţia arhitecţilor romani s-a dovedit în stare să trezească admiraţie, inspirînd, tocmai prin diversitatea şi amalgamarea stilurilor, un sentiment de măreţie şi de frumos, care a fost considerat demn de imitat şi a dăinuit — ca artă romană — pînă în secolul al XII-lea (fig. 78).

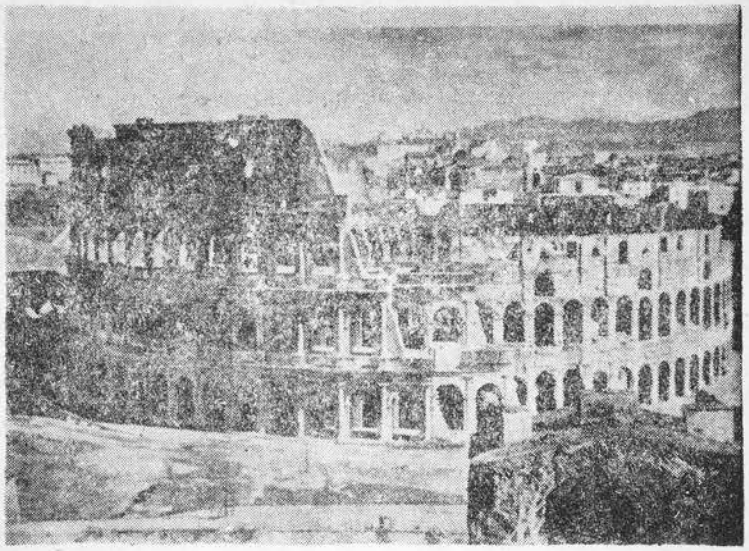


Fig. 78

— Ai dreptate, din a doua jumătate a secolului al XII-lea arta romană a fost înlocuită cu cea gotică, artă care a uimit prin catedralele ce se înălțau tot mai sus către cer.

— La început, denumirea de artă gotică avea un înțeles peiorativ, căci această artă, care are ca element nou și original *ogiva*, s-a născut în Franța și nu are cu goții nici în clin, nici în mînecă. Interesant pentru noi este faptul că și ogiva se reduce tot la o problemă de geometrie : de la un *semicerc* s-a trecut la *intersecția a două arce de cerc !*

— Da, iată și o metodă de a construi cîteva feluri de ogive, care să aibă baza pe segmentul de dreaptă AB (fig. 79). Se împarte, de pildă, segmentul AB în patru părți egale astfel că $AA_1 = BB_1 = \frac{AB}{4}$. De o parte și de alta apunctelor A și B se fixează punctele A_2 și B_2, simetrice față de A și, respectiv, B. Apoi din A_2 ca centru și cu o rază egală cu A_2B se descrie arcul de cerc BC_2, iar din B_2 ca centru, cu aceeași rază, arcul AC_2. Se obține astfel prima ogivă, figura

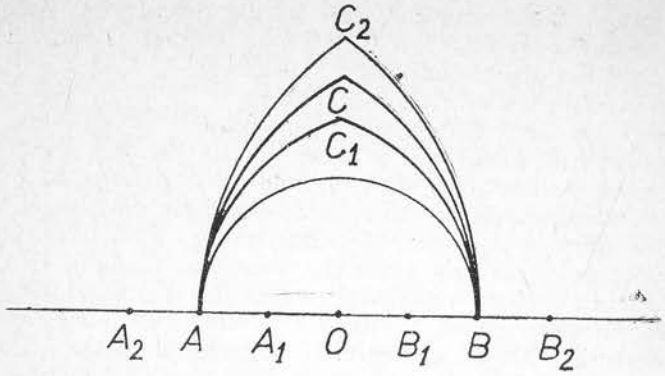


Fig. 79

formată prin întretăierea arcelor egale de cerc AC_2 *și* BC_2. Se procedează la fel descriind arce de cerc de rază AB cu centrele în A și B ca să se obțină ogiva ACB sau descriind arcele de cerc de rază A_1B avînd centrele în A_1 și respectiv B_1 ca să se formeze ogiva AC_1B.

— Desenul acesta arată clar trecerea de la arcada romană — semicirculară — la arcadele acestea gotice, care-s cu atît mai ascuțite cu cît centrele celor două arce de cerc care se întretaie ca să le formeze sînt mai îndepărtate de extremitățile segmentului de bază.

— Ce simplu și cît de frumos este acest desen ! Privindu-l simt parcă emanciparea acestor arce zvelte, descătușarea lor de semicercul care le ținea legate de pămînt și avîntul lor nestăvilit spre înălțimi !

— A fost chiar un avînt nestăvilit, căci catedralele s-au înălțat, cît de mult a dorit arhitectul care găsea soluțiile necesare ca eleganța cupolelor gotice realizate prin înălțimea ogivelor să nu micșoreze soliditatea plincintrului roman.

— Curios mi-a părut întotdeauna faptul că acest stil a cucerit toate țările din Europa occidentală în afară de Italia. În Franța, unde-și are obîrșia, Germania, Olanda, Spania, Portugalia, Anglia s-au găsit mulți artiști-arhitecți care au proiectat și apoi au zidit, plini de elan și entuziasm minunatele catedrale gotice, ale căror proporții au rămas încătușate de tăietura de aur și de triunghiul echilateral. Acești arhitecți,

prin perfecțiunea tehnică de care au dat dovadă, au ieșit din anonimatul secolelor XI și XII și s-au afirmat ca individualități artistice aparținînd țărilor respective.

— Dar în Italia ce s-a întîmplat ?

— Cum ce ? Renașterea ! Din secolul al XIV-lea, în Italia, atenția artiștilor și a oamenilor de știință s-a îndreptat, plină de nostalgie, către vechile orașe romane cu palatele și monumentele în ruină, le-au deșteptat din somnul lor lung și adînc și au căutat să refacă tradiția și să reconstituie tehnicile de construcție uitate. La începutul secolului al XV-lea, vechea noastră cunoștință, arhitectul și artistul Brunelleschi, a ridicat prima construcție în noul stil al Renașterii, catedrala din Florența, numită și Campanila (clopotniță), cu domul cel mai înalt și mai larg de atunci, avînd cupola semisferică. Acesteia i-au urmat alte edificii cu bolți în plincintru în care renaște arta greco-romană împodobită cu bogate ornamentații. În același stil nou s-a construit la Roma, în secolul următor, bazilica Sf. Petru de către Bramante și Michelangelo.

— De fapt, abia în prima jumătate a secolului al XVII-lea au fost terminate lucrările de construire ale bisericii Sf. Petru de către renumitul sculptor și arhitect Gian Lorenzo Bernini, *ultimul mare artist al Renașterii*. Atunci, tot el a renovat și piața din fața bisericii, considerată a fi „una dintre cele mai geniale soluții urbanistice pe care le cunoaște istoria arhitecturii" [28, p. 141] Numele lui este strîns legat de modernizarea Romei.

— Da, Bernini a fost un mare geometru și a știut cum să se folosească de această știință. „Frumusețea tuturor lucrurilor din lume constă în proporții", spunea el. De pildă, ovalul pieței Sf. Petru este construit din două cercuri secante de aceeași rază, astfel ca axa principală să aibă lungimea de trei raze. Și aș vrea să-ți mai povestesc despre *Scala Regia* de la Vatican, construită tot de el. „Bernini a dispus de o coloană de secțiune descrescîndă, folosindu-se de convergența pereților. Rezultatul : scara pare mult mai lungă decît este în realitate ; cînd o urci, încerci un efect de surpriză, datorită îmbucăturii a două structuri spațiale" [41, p. 134]

— Mai mult decît atît, stilul lui plin de fantezie în aplicarea decorațiilor de origine romană a plăcut atît de mult încît s-a răspîndit în toată Europa sub numele de *stil baroc*,

numirea pare să se lege de cuvîntul *portughez* care înseamnă *perle neregulate*. De fapt, semnificația de *baroc* nu-i bine precizată nici pînă azi, fiindcă nu există *un stil baroc unic*. În articolul respectiv din *Enciclopedia franceză* Diderot scria: „Baroc, adjectiv în arhitectură, este o nuanță de bizar. Este, s-ar putea spune, rafinament sau abuz sau superlativul. Ideea de baroc atrage după sine pe aceea de ridicol împins la exces". Iar Benedetto Croce susținea că „barocul înseamnă prost gust".

— De atunci însă lucrurile s-au mai schimbat. Iată ce afirmă J. Philippe Minguet, care a studiat în amănunt această problemă : „La începutul acestui secol, părerea generală cu privire la baroc se rezumă la următoarele puncte :

1. Că barocul este un fenomen istoric a cărui apariție, dezvoltare și sfîrșit s-au petrecut între secolele XVII și XVIII și exclusiv în lumea occidentală.

2. Că el afectase mai mult arhitectura, cel mult cîteva manifestări ale sculpturii și picturii.

3. Că era vorba de un stil patologic, de un val de monstruozitate și de prost gust.

4. Că a luat naștere dintr-un fel de descompunere a stilului clasic al Renașterii.

Astăzi, dimpotrivă, tindem din ce în ce mai mult să credem că :

1. Barocul este o CONSTANTĂ istorică, ce se repetă la niște epoci tot așa de îndepărtate una de alta cum e *alexandrinismul* de *contrareformă*...

4. Barocul, departe de a-și afla originea în stilul clasic, i se opune acestuia în mod mai categoric decît romantismul, care nu este, în fond, decît un episod din desfășurarea constantei baroce". [41, p. 49—50]

În continuare, am să-ți citesc cîteva observații interesante : „După cum arhitecții baroci rup elementele clasice, ei le și pun în mișcare, sau, mai exact, inversează problema clasică, căutînd mișcarea în dauna stabilității... Înlocuirea liniei drepte cu o curbă... nu înseamnă... renunțarea voluntară la preocuparea constructivă. În sine, linia curbă nu se pretează mai puțin decît cea dreaptă la partiul tectonic ; la urma urmelor, o construcție poate fi barocă avînd o predominanță de unghiuri drepte, așa cum o dovedește mai ales barocul hispanic și cel din Italia de sud... Nu, nu prin curbe, ci prin

contrastul dintre curbe, mijloc eficace pentru sugestia cinematică, artiștii baroci își propun să producă noi impresii plăcute... În sfîrșit, invers față de clasici, artiștii baroci acordă întîietate, în mod ideal, viziunii oblice și volumetriei...". [41, p. 140] Asta despre *baroc* dar, fiindcă din baroc au derivat și stilurile *rococo* și *rocaille*, să mai citim cîteva propoziții informative din același volum : „Noțiunea de *rococo* se pierde în aceea de *baroc tîrziu*... germanii înțeleg prin „rocaille" stilul ornamental asimetric folosit în decorația edificiilor „baroce-rococo". În Franța, distincția este mai puțin netă. Louis Réau vede în „stilul rocaille sau rococo forma franceză a barocului". În schimb, Marcel Aubert nu vrea să confunde rocaille-ul, „această artă fermecătoare și spirituală, fantezistă, dar întotdeauna măsurată, care a îmbogățit Franța cu atîtea capodopere", cu rococo-ul, „descendență exacerbată și puțin afectată a barocului" ... [1.c, p. 120—121] În legătură cu rocaille-ul, autorul evocă două noțiuni matematice : *una*, foarte la modă în secolul al XVIII-lea : „rocaille-ul tinde către infinitezimal. Este compus din elemente din ce în ce mai mici, din curbe în formă de „C" sau de „S", îmbucate una în alta, în chip de flacără, care se subțiază în flăcărui, în scîntei... șiroind în cascadă, în picuri. În capitele, în cartușe, în ancadramente de fresce etc., există deci elemente, jumătate abstracte, jumătate figurative, cvasimicroscopice, ajutate de distanță, iar prezența lor cere timpul de lectură cuvenit. În timp ce seriile regulate ale ornamentului clasic dau naștere unei durate, unui timp îndelungat, multiplicarea temelor în rocaille suscită un timp scurt, punctual. Cu alte cuvinte, perceperea decorului nu este posibilă în totalitatea lui ; ochiul se istovește de atîta detaliu ; după ce a parcurs totul, nu este sigur că a înregistrat toate. Totuși, deoarece toate elementele, cu infinita lor varietate, țin, mai mult sau mai puțin de aceeași schemă — curba în formă de „C" —, acumularea de momente perceptive regăsește o unitate la nivelul ansamblurilor". Și, *a doua* : „Rocaille-ul sfîrșește prin a face absurdă apriori orice încercare de explicație pitagoreică a spațiului rococo. Numărul de aur este aici de două ori neputincios. Nimic, în rocaille, nu poate fi reductibil la geometric. Refuză figura stabilă...

Coborînd cu suprafețele fluide ale învelișului, asumîndu-și, la nevoie, această fluiditate, ornamentația instaurează o ar-

monie de atmosferă, ale cărei rațiuni ar putea fi cu greu exprimate". [41, p. 157]

— E adevărat că în secolul al XVIII-lea preocuparea de căpetenie a arhitecților era cum să amestece regularitatea stilurilor antice cu fanteziile rocaille-ului dar, o dată cu sfîrșitul acestui secol s-a sfîrșit și cu aceste preocupări galante sau plăcute. În secolul al XIX-lea, în arhitectură apare un material nou, *fierul*, foarte util, dar nu tot atît de frumos ca piatra și cărămida. Aceasta a făcut pe arhitecți să caute modalitatea de a-l ascunde sub fațade de piatră și cărămidă. În același timp, asistăm la o avalanșă de stiluri imitative : stilul neo-grec, stilul neo-renascentist ș.a.m.d.

— Îmi place foarte mult expresia lui Matila Ghyka : „marele bazar al secolului al XIX-lea". [17, p. 324]

— Chiar așa și era. Unui neinițiat i-ar fi fost imposibil să enumere sau să deosebească toate stilurile în care se ridicau diferitele clădiri din orașul lui sau din altul în care s-ar fi aflat. Abia mai tîrziu, în ultima decadă a secolului al XIX-lea, cînd fierul s-a impus *cu funcție decorativă*, a apărut și un curent nou denumit „Arta nouă" (Art Nouveau) care realiza formele decorative din fier sau din combinații de fier și sticlă, folosea asimetria în distribuția maselor de construcție, a ferestrelor și ușilor și avea ca principiu să nu țină seamă de natura specifică a materialelor sau de problemele legate de funcționalitate.

— Aș vrea să citesc ce părere avea Matila Ghyka despre înfățișarea arhitecturii în acest interval de timp : „În jurul lui 1900 nu mai avem o simplă decadență, ci chiar dispariția arhitecturii sub aspectul ei de creație vie ; iar remediul încercat cu „arta nouă", cu pretențiile ei de ornamentație organică sau florală și cu totala ignorare a dinamicii vieții, pare chiar mai rea decît răul ; simbolurile ei sună tot atît de găunos ca și spațiile alegorice ale școlii oficiale... Omul a fost, într-adevăr, zdrobit esteticește de prima fază a mașinismului și impunerea apăsătoare a acestuia în toate manifestările producției, transporturilor, vieții în comun. Am avut impresia unui iremediabil divorț între frumusețe și viața modernă..." Adaug la acestea și părerea celebrului arhitect francez Le Corbussier, citată tot aici : „Arhitectura de astăzi nu mai știe de ceea ce a însemnat începutul... Arhitectura nu are nimic de-a face cu stilurile. Arhitecții acestor vremuri,

pierduți în *vineții*mele sterile ale planurilor lor, a frunzișurilor sculptate, a pilaștrilor sau coamelor de casă din plumb, n-au ajuns la concepția volumelor primare. Nimeni nu i-a învățat vreodată așa ceva în Școala de Arte frumoase... Arhitecții se tem astăzi de geometria suprafețelor... Arhitectura, fiind un joc savant, corect și măreț al volumelor asamblate sub lumină, arhitectul are obligația de a face să trăiască suprafețele care învelesc aceste volume, fără ca acestea, devenind parazitare, să mănînce volumul și să-și absoarbă spre folosul lor : istoria tristă a timpurilor prezente". [17, p. 325 și 336]

— După cîte știu, *arta nouă* nu a rezistat nici două decenii, a fost curentul cu cea mai scurtă viață din arhitectură și era de așteptat să fie așa. Problema pe care avea să o rezolve arhitectura modernă nu era de competența ei. Trebuia să se acopere spații vaste, în care să locuiască, în condiții bune, mulțimi numeroase, folosindu-se ca materiale fierul și betonul armat. După cum observă Marcel Melicson, arhitectura se îndreaptă către un *frumos rațional :* „Orice organism este cu atît mai frumos cu cît este mai bine adaptat scopurilor sale. Într-o operă cu adevărat frumoasă, nimic nu este lăsat la voia întîmplării, totul este justificat, util, totul se îndreaptă spre rezultatul urmărit. Frumusețea supremă, capodopera artistică, strălucita manifestare a geniului, este, în același timp, triumful rațiunii". [42, p. 71]

— Iată cît de sugestiv explică această transformare, această trecere de la *arta nouă* la *arta modernă*, Matila Ghyka : Cînd a apărut epoca electricității și a betonului armat „s-a produs un fenomen paradoxal : tocmai din sectorul constructorilor de uzine, de docuri, de poduri, al slujitorilor austeri ai industrialismului distrugător de vise, par să sclipească acum zorii învierii pentru arhitectura moartă. În lupta lor cu problemele concrete, în care se cerea să se constrîngă spațiul, masele și presiunile, ...inginerii au văzut izvorînd din mîinile lor volumele pure și deschise, profilurile armonioase uitate de multă vreme... Ochiul a încercat, privindu-le, o plăcere de mult timp absentă în contemplarea construcțiilor moderne, încît a fost nevoie de o reeducare de mai mulți ani pentru a recunoaște că era, într-adevăr, vorba de o plăcere estetică și că seninătatea care se degaja din cutare silozuri... era aceeași ca și aceea care emana... din bazilicile romane, ...că simbolismul vibrant al marilor poduri de oțel... se datorește aceluiași adevăr dinamic care ne emoționează la bolțile și contraforturile catedralelor gotice" [17, p. 325—326].

— Ca să nu mă las mai prejos, am să-ți citesc și eu, ce scria Le Corbussier, în 1923, în cartea sa *Către o arhitectură :* „Cuburile, conurile, sferele, cilindrii, piramidele sînt marile forme primare pe care lumina le scoate în evidență ; imaginea lor este precisă, fără neclaritate. De aceea sînt forme frumoase, cele mai frumoase forme... Axele, cercurile, unghiurile drepte sînt adevărurile geometriei, altfel ar fi hazard, anomalie, arbitrar. Geometria e limbajul omului. Marile probleme ale construcției moderne vor fi realizate prin geometrie... Linia dreaptă aduce sănătate sufletului orașelor... Găsim linia dreaptă în toată istoria omenirii, în orice act uman... Dreapta este o reacție, o acțiune, mișcare, efectul unei autodeterminări". [42, p. 79]. Și, după mai bine de 30 de ani, preocupat tot de această problemă a urbanismului, într-o altă carte intitulată chiar *Asupra stării actuale a urbanismului* scria : „Compoziția arhitectonică este geometrică, eveniment de ordin vizual în primul rînd, eveniment antrenînd judecățile de cantitate, de raporturi, aprecieri de proporții. Proporția provoacă senzații, iar perindarea acestor senzații corespunde melodiei din muzică". Luînd omul ca etalon, așa cum au procedat și artiștii din Antichitate, Le Corbussier a ales o nouă scară de proporție în locul tăieturii de aur, o scară care să corespundă cerințelor moderne ale arhitecturii, planurilor pentru fabrici construite pe sute de hectare, baraje și hidrocentrale uriașe. Acest etalon modern, pe care el l-a numit *modulor*, cuvînt format din *modul* — adică raport sau scară de proporții — și *or* (aur) are același înțeles ca și vechiul termen folosit în Antichitate și Renaștere : *raportul sau tăietura de aur*. Modulorul său este un segment egal cu înălțimea unui om mijlociu, stînd în picioare și avînd un braț ridicat, adică o lungime de 216 cm (fig. 80). În acest caz, ombilicul împarte segmentul în două părți egale de cîte 108 cm, iar una dintre aceste părți este împărțită în tăietura de aur de distanța de la vîrful degetelor la cap (41,5 cm) și de la cap la ombilic (66,5 cm). Cu aceste dimensiuni, Le Corbussier a format un șir Fibonacci care să reprezinte *scara modulor* aplicată în construcțiile sale :

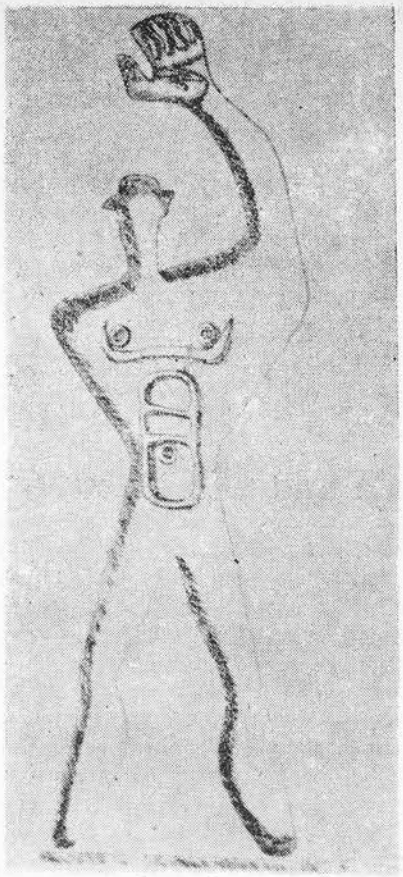


Fig. 80

41,5 ; 66,5 ; 108 ; 174,5 ; ....

Folosind această scară, se stabilesc diferitele combinaţii astfel ca dimensiunile dintre diferitele părţi ale unei clădiri să fie în tăietura de aur. Dar, Le Corbusssier atrage atenţia că faptul de a fi stabilit un nou modulor nu rezolvă şi problema construcţiilor arhitectonice echilibrate sau armonioase. Aceasta rămîne o problemă pe care nu o poate rezolva decît

artistul respectiv, dacă este dotat cu vocaţie. O spune chiar autorul : „Modulorul nu dă talentul şi încă mai puţin geniu. El nu subţiază ceea ce nu-i subţire ; el oferă doar plăcerea şi încrederea care poate rezulta din folosirea măsurilor sigure". „Desigur că arta este cu totul altceva decît organizare sau formule matematice — mai explică Le Corbussier —, însă dacă se întîmplă să fii artist, modulorul este ca dalta în mîna unui sculptor ce-şi realizează opera sau ca *un pian bine acordat* pentru un pianist".

— E adevărat că de la Pitagora încoace s-a tot încercat să se caute secretul frumosului exprimat sub formă numerică. Mai întîi a făcut-o Pitagora, apoi Platon şi toţi marii artişti plastici din Grecia, apoi Vitruviu, Leonardo da Vinci, Dürer. Aceştia, şi încă mulţi alţii, au socotit că tăietura de aur ar fi raportul cel mai indicat. Tot acelaşi raport, dar exprimat prin alte numere, se găseşte şi în modulorul lui Le Corbussier. Problema însă nu-i rezolvată şi asupra ei cred că va trebui să mai stăm de vorbă şi altă dată. Pentru azi ne ajunge.

HAI SĂ NE JUCĂM !

— Dragă Bădie, uite am împrumutat de la Biblioteca Seminarului Matematic aceste cărți cu *Recreații matematice*, ca să-ți propun să ne petrecem după amiaza aceasta, jucîndu-ne !

— De acord, hai să ne jucăm ! Dar mai înainte de a ne opri la jocurile care le-ai ales, aș vrea să te întreb : Ce am făcut noi de atîtea săptămîni, de cînd ne tot întîlnim cu regularitate, oare nu ne-am jucat ? Nu aștept răspunsul tău, propunerea ta îmi arată că trebuie să-l caut în altă parte, de altfel l-am și găsit în cartea pe care o citesc acum *Homo ludens* a lui Johan Huizinga.

— Cunosc cartea. Autorul ei susține că cel mai nimerit epitet care ar trebui dat omului este *homo ludens*, adică *omul care se joacă*, dat fiind, spune el, că „orice acțiune omenească se reduce la joacă". [43, p. 30]. Numai că eu nu sînt de părerea lui.

— Ba eu sînt, și ca să-ți tai replica pe care ți-o văd fluturînd pe buze, am să-ți recitesc — dacă zici că ai citit cartea — cîteva rînduri care cu greu cred că le poți contrazice. Mai întîi : Orice joc este în primul rînd și mai presus de toate *o acțiune liberă*... Jocul nu este viața *obișnuită* sau *propriu-zisă*, ci o ieșire din ea, într-o sferă temporară de activitate cu tendință proprie... Ordinea pe care o impune jocul este absolută... În această relație intimă cu noțiunea de ordine rezidă fără îndoială motivul pentru care, ...jocul pare situat, într-o măsură atît de mare, înlăuntrul domeniului esteticului. Jocul, spuneam, are o înclinare să fie frumos. Factorul estetic este poate identic cu silința de a crea o formă ordonată, care întrepătrunde jocul în toate aspectele lui. Termenii cu care putem desemna elementele jocului se află, în mare parte, în sfera esteticului. Sînt termenii cu

care încercăm să exprimăm și efectele frumuseții : încordare, echilibru, oscilație, alternanță, contrast, variație, legare și detașare, rezolvare. Jocul leagă și dezleagă. Captivează. Farmecă, adică vrăjește". Și, în fine, ca un rezumat autorul adaugă : „Jocul este o acțiune sau o activitate efectuată de bună voie înlăuntrul unor anumite limite stabilite, de timp și de spațiu, și după reguli acceptate de bună voie, dar absolut obligatorii, avînd scopul în sine însăși și fiind însoțit de un sentiment de încordare și de bucurie, și de ideea că *este altfel* decît *viața obișnuită*". [43, p. 45—46 și 70]. Și acum te întreb din nou : Oare toate discuțiile noastre de pînă acum nu au fost o joacă ?

— Ba da, m-ai convins că am greșit. Și, ca să-ți țin hangul, îi aduc drept mărturie și pe Mark Twain, care făcea următoarea deosebire dintre muncă și joacă : „Muncă înseamnă ceea ce un om este obligat să facă și joacă înseamnă ceea ce un om nu-i obligat să facă". Mi-am adus aminte de cuvintele acestea pe cînd te ascultam citind și cînd prin minte îmi treceau discuțiile noastre, proiectate parcă sub un alt unghi, în adevăr ca niște jocuri pline de vioiciune și încordare, căutînd amîndoi să ne întrecem a găsi cît mai multe puncte de legătură între calda frumusețe a muzicii, picturii sau arhitecturii și frumusețea mîndră și calmă a matematicii. Iar cînd a fost cu tăietura de aur, cu poliedrele regulate și semiregulate sau cu pătratele magice, atunci ne-am jucat de-a binelea, și, drept să-ți spun că mă rușinez de mine, că nu m-am putut elibera încă de mentalitatea aceea școlărească, ce încă mă încătușează. În această clipă parcă sînt altul ; nu, nu mai avem nevoie de cărțile de *Recreații* și am să le duc înapoi.

— Acum treci în cealaltă extremă, și-i natural, fiindcă oricît ai vrea tu să fie altfel, nu se poate, tinerețea își are legile ei, minunatele ei legi. Cărțile care le-ai adus le vom folosi fiindcă sînt frumoase. Jocurile și amuzamentele matematice au un caracter recreativ și de aceea au fost întotdeauna apreciate, mai ales că problemele propuse nu-s întotdeauna prea ușoare. De altfel, însuși cuvîntul *problemă*, observă Huizinga, cuprinde „două semnificații originare concrete : ceva pe care cineva îl are în față sau îl pune în fața cuiva, pentru a se apăra — de pildă, un scut —, și ceva pe care cineva îl aruncă cuiva, ca să-l prindă, să-l preia ...Jocu-

rile de inteligență, surprinderea cuiva cu ajutorul unor întrebări încuietoare, ocupau un loc important în conversația grecească... De pildă : Ce este la fel pretutindeni și nicăieri ? Răspuns : timpul". [43, p. 236].

— E drept că grecii iubeau jocurile matematice și nici nu s-ar fi putut să fie altfel cînd au dovedit un cult pentru jocurile fizice. Multe dintre jocurile cu numere sau figuri le-au luat de la egipteni și probabil că și egiptenii le-au moștenit de undeva, asta ca să se adeverească zicala că jocurile sînt vechi de cînd lumea. În săptămînile trecute a fost vorba de Bachet de Méziriac. El a publicat la Paris prima carte în care a adunat *Problemele plăcute și amuzante* care se fac cu numere, iar cartea aceasta a avut un succes așa de răsunător încît el însuși a trebuit să o prelucreze și să o retipărească de cinci ori în cursul vieții lui. Nu știu cîte ediții au avut și în veacul al XVIII-lea, dar știu că a servit de model la toate lucrările ce s-au tipărit ulterior.

— Această carte l-a încîntat îndeosebi pe Fermat, care avea pasiunea numerelor.

— A numerelor prime, a numerelor perfecte, a numerelor prietene, la care ne-am gîndit și noi odată. De pildă, eu cunosc o poveste foarte frumoasă legată de numerele prime ale lui Fermat.

— Vrei să spui de numerele de forma : $n_t = 2^{2^t} + 1$?

— Da, și dacă vrei mai multe amănunte, află că lui Fermat i-au plăcut foarte mult aceste numere, fiindcă ele se formau pornind numai de la numerele 1 și 2. După ce a calculat cinci numere :

$n_0=3$, $n_1=5$, $n_2=17$, $n_3=257$ și $n_4=65\,537$, n-a mers mai departe, ci a declarat că formula stabilită de el este un izvor de numere prime. Un timp destul de îndelungat matematicienii l-au crezut, dar peste vreo trei sferturi de veac, atunci cînd Leonard Euler a avut curiozitatea să calculeze n_5 și l-a găsit, anume 4 294 967 297 a constatat că el se divide cu 641 !

În legătură cu acest număr mi-am adus și eu aminte de ceva. Se spune că Zerah Calburn, unul dintre calculatorii minune, a fost pus să calculeze acest număr și să spună dacă-i prim. În cîteva clipe a dat răspunsul corect. Întrebat cum procedează, a răspuns foarte sincer că nu știe cum, găsește doar răspunsul : prin niște procedee care nu-s deloc

aritmetice, ci empirice. Însă, foarte interesantă îmi pare legătura dintre numerele prime ale lui Fermat și construirea poligoanelor regulate cu rigla și compasul. După cum bine știi, matematicienii greci au stabilit că poligoanele regulate cu 3, 4, 5, 6 și orice multiplu de doi ale acestor numere de laturi se pot construi cu rigla și compasul, dar, oricîte străduințe și-au dat, nimeni nu a putut construi cu rigla și compasul un poligon regulat cu un număr impar de laturi, ca : 7, 9, 11 ori 13, timp de 22 de veacuri, pînă la Gauss. El a demonstrat că aceste poligoane nu se pot construi cu rigla și compasul, însă fac excepție poligoanele regulate cu numărul laturilor egal cu un număr prim al lui Fermat. În adevăr, poligoanele cu 3 și 5 laturi reprezintă numere Fermat. Următorul este 17 și Gauss a arătat cum se poate construi acest poligon cu rigla și compasul. Spre sfîrșitul secolului al XIX-lea s-au construit și celelalte două. Ultimul, cel cu 65 537 laturi a cerut 10 ani de calcule și manuscrisul care cuprinde această uriașă muncă se găsește în Biblioteca Universității din Göttingen". [50, p. 14].

— Îmi închipui cît de mulțumit și chiar fericit trebuie să se fi simțit acel pătimaș calculator, cînd a terminat lucrul. Și mai cred că el a considerat că a făcut un lucru de ispravă, fiindcă altfel nu ar fi dăruit manuscrisul Bibliotecii din Göttingen. Așa că, vorbindu-ți despre numerele prime ale lui Fermat am ținut să-ți dovedesc că m-am pregătit să cercetăm acest capitol. Pot să-ți mai spun că Pitagora a numit *perfecte* acele numere care reprezintă suma divizorilor lor, de pildă $6=1+2+3$.

— Aceste numere le menționează și Euclid în Cartea a IX-a a *Elementelor*. Teorema 36 arată o metodă de a le forma. Numai că formula modernă o găsim expusă mai clar în cartea profesorului Ion Creangă ; *Introducere în teoria numerelor* : „Condiția necesară și suficientă ca un număr natural, par, n, să fie perfect este ca n să fie de forma : $n=2^t(2^{t+1}-1)=2^t \cdot p$, unde t este un număr natural, iar p este un număr prim".

— Așadar, ca să găsim *numerele perfecte* trebuie să se determine valorile lui t pentru care expresia $(2^{t+1}-1)$ este un număr prim. Azi aceste numere se numesc *numerele prime ale lui Mersenne*, pentru că el le-a calculat în cartea pe care a publicat-o la Paris, în 1644, cu titlul : *Cogitata Physico-*

Mathematica. Notînd $M_t = 2^t - 1$, Mersenne a arătat că pentru $t < 257$ există numai 12 valori ale lui t care fac M prim, anume : $t = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$.

— Te întrerup ca să-ți spun că nu de mult a fost stabilit cel mai mare număr prim de tip Mersenne, desigur nu ultimul, anume : $M = 2^{19\,937} - 1$ și e format din 6 002 cifre. A fost calculat cu ajutorul unui calculator electronic, în 1971. Dar să ne întoarcem la numerele perfecte. În Antichitate au fost cunoscute numai patru numere perfecte, anume pentru :

$M_2 = 3$, $n_2 = 6$; $M_3 = 7$, $n_3 = 28$; $M_5 = 31$, $n_5 = 496$ și $M_7 = 128$, $n_7 = 8\,128$.

Aceste numere sînt arătate în *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, scrisă, cum ți-am mai spus, la începutul veacului al II-lea e.n. El a observat că printre numerele de la 1 la 10 există un singur număr perfect : 6, și tot așa, 28 este singurul număr perfect de două cifre, 496 singurul număr perfect cu trei cifre și 8 128 e singurul număr perfect cu patru cifre.

— Dă-mi voie să te corectez ! Nicomah din Gherasa nu cunoștea notația zecimală, așa că el nu a vorbit de *numere de două cifre*, și așa mai departe !

— Recunosc, el a vorbit de numere cuprinse între 1 și 10, apoi de șirul numerelor cuprinse între 10 și 100 etc. Tot el a dedus că, deși numărul acestor numere perfecte trebuie să fie nesfîrșit de mare, ele se vor distanța mult între ele și că toate ar trebui să se termine fie cu 6, fie cu 8 !

— Aceasta-i presupunerea lui, dar pînă acum nu s-a putut demonstra că *nu poate exista un număr perfect nepereche*, după cum nu se știe nici dacă nu s-ar putea găsi și *o altă formulă pentru numerele perfecte*, în afară de aceea stabilită de Euclid. Dar mai bine hai să căutăm cînd și care numere perfecte au mai fost stabilite.

— Uite, în secolul al XV-lea, Regiomontanus l-a găsit pe $n_{13} = 33\,550\,336$, așadar, a avut dreptate bietul Nicomah, n_{13} e departe mult de n_7, căci el este de ordinul milioanelor. În secolul următor, J. Scheybel, cel care a tradus pe Euclid în limba germană, a calculat și următoarele două numere perfecte : n_{17} și n_{19} ; ultimul are 12 cifre, adică este de ordinul bilioanelor. Al optulea număr perfect se găsește în cartea lui Mersenne, adică a fost calculat, iarăși la o distanță de un secol de cele anterioare și are 19 cifre. Iată-l : $n_{31} = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$. Fără să cunoască acest rezultat, Euler l-a recalculat în 1750. Cît privește ultimele patru numere din seria prevăzută de Mersenne și ele au fost calculate, anume : *al nouălea* în secolul al XIX-lea, iar *celelalte trei* în secolul nostru, în 1917. Dar aceste numere nu le mai scriem, căci ele intră în categoria numerelor gigante sau cum le mai numesc unii autori *supranaturale*.

— În una dintre cărțile pe care le-am adus azi, scrisă de Martin Gardner, *Alte amuzamente matematice* și tradusă în românește, se află o notă în legătură cu numerele gigante, anume că matematicianul american Edward Kasner (1878—1955) a propus numele de *googol* pentru numărul 10^{100}, adică 1 urmat de 100 de zerouri și că, în glumă, a bătut o monedă cu acest nume. Acest număr se pare că întrece numărul atomilor din sistemul solar. [44].

— Pot să mai adaug că, cu ajutorul ordinatoarelor, s-au calculat, după 1958, încă 11 numere prime ale lui Mersenne, ultimul descoperit pentru $t = 11\,213$ are 3 376 de cifre, așadar este mai mare decît un googol. Mă întreb de cîte pagini ar fi nevoie ca să se scrie numărul perfect corespunzător ? Și acum, pînă ce voi pregăti eu o cafelută, te rog pe tine să-mi propui una dintre problemele cu care aveai de gînd să ne jucăm în după amiaza aceasta.

— Dacă vrei, iată una din aceeași carte, a lui Gardner. Este intitulată : *Alb, negru și castaniu*. Se spune că la o masă se aflau trei prieteni : profesorul M. White (alb), profesorul L. Black (negru) și J. Brown (castaniu). Am pus eu castaniu în loc de *cafeniu* căci termenul mi se pare mai potrivit cu cele ce urmează.

— Nu-i interesant, zise doamna că numele noastre de familie sînt Black, Brown și White, iar unul dintre noi are părul negru, altul castaniu și celălalt alb ?

— Adevărat a remarcat persoana cu părul negru, dar nici unul dintre noi nu are culoarea care să corespundă numelui.

— Așa-i, exclamă White. Ce culoare are părul profesorului Black dacă părul doamnei este castaniu ?

— Dacă presupun că J. Brown este femeie, părul ei nu poate fi castaniu și nici negru, căci la observația ei a răs-

puns *persoana cu părul negru*. Aşadar, părul ei ar trebui să fie *alb*. Atunci rezultă că profesorul White trebuie să aibă părul negru şi rămîne profesorul Black cu părul castaniu. Dar fiindcă se spune că părul castaniu îl are femeia, înseamnă că numele ei este Black, iar J. Brown este bărbat şi are părul alb. E bine ?

— Ştiu eu ? Pare că da şi totuşi raţionamentul e altfel decît cel indicat în carte. [1. c, p. 34 şi 42]. Dar fiindcă ne-am băut cafelele, hai să discutăm despre *numerele prietene* şi să-i lăsăm pe cei trei prieteni să se descurce singuri. Ştiu că numele de *numere prietene* se datoreşte lui Pitagora. Anume, cînd cineva l-a întrebat cum ar trebui să fie doi oameni ca să se numească *prieteni*, el i-a răspuns fără ezitare : „aşa ca numerele 220 şi 284 !".

— Nu cred că cineva ar fi fost în stare să dea o definiţie mai perfectă decît aceea de a asemăna o prietenie cu două numere construite în aşa fel ca unul dintre numere să fie egal cu suma divizorilor celuilalt număr, adică să cuprindă în el tot ce are celălalt număr mai intim. Tradus la oameni, ar însemna că toate gîndurile, toate aspiraţiile, toate preocupările unuia să-şi găsească loc în sufletul celuilalt, şi aceasta de o parte şi de alta, aşa după cum divizorii lui $220 : 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ prin adunare dau : $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$ în timp ce divizorii lui $284 : 2^2 \cdot 71$ dau prin adunare :

$$1+2+4+71+142 = 220.$$

— Aceasta a fost singura pereche de numere prietene cunoscută în Europa pînă în 1636, cînd Fermat a descoperit o nouă pereche de numere prietene, anume $A = 2^4 \cdot 23 \cdot 47 = 17\,296$ şi $B = 2^4 \cdot 1\,151 = 18\,416$, iar peste doi ani, Descartes a stabilit şi el o nouă pereche de numere prietene : $A = 2^7 \cdot 191 \cdot 383 = 9\,363\,584$ şi $B = 2^7 \cdot 73\,727 = 9\,437\,056$. Aceste perechi au fost publicate de Mersenne în anul 1644, în cartea sa *Cogitata*, fără să menţioneze cum au fost stabilite. De altfel, se pare că datorită lui Mersenne au fost descoperite aceste două perechi noi de numere prietene.

— Cum datorită lui Mersenne ?

— Iată cum : primele două numere prietene erau cunoscute de matematicienii arabi, probabil din cărţile greceşti pe care le traduseseră în limba lor. Iată ce scrie Oystein Ore

în cartea sa *Number Theory and its History* : În scrierile matematice arabe, numerele prietene apar de mai multe ori. Ele au jucat un rol în magie şi astrologie, în stabilirea horoscoapelor, în vrăjitorie şi în fabricarea talismanelor. Ca o ilustrare vom cita din *Historical Prolegomenon* a învăţatului arab Ibn Khaldun (secolul al XIV-lea) : „practica artei talismanelor ne-a făcut să recunoaştem minunatele virtuţi ale numerelor prietene. Ele sînt 220 şi 284. ...Autorul *Ghaia*-ei şi alţi mari maeştri declară că ei au văzut acestea confirmate de experienţă". În secolul al IX-lea, matematicianul şi astronomul arab, stabilit la Bagdad, Tabit ibn Korra a găsit chiar o formulă care arăta cum se pot calcula perechile de numere prietene, însă el *nu a calculat*, în mod practic, *nici o altă pereche decît aceea cunoscută de Pitagora*. Iată formula : Dacă se pot găsi trei numere p, q, r, toate prime, de forma

(1) $p=3\cdot 2^n-1$; $q=3\cdot 2^{n-1}$; $r=9\cdot 2^{2n-1}$, unde n este un număr natural mai mare decît 1, atunci perechile

(2) $A = 2^n \cdot p \cdot q$ şi $B = 2^n \cdot r$ sînt numere prietene.

În cărţile de *Aritmetică* traduse din limba arabă şi tipărite în Europa, precum şi în acelea compuse de matematicienii din Europa apuseană prin secolele XV şi XVI, sînt menţionate numerele prietene 220 şi 284, ca exemple în legătură cu proprietatea divizorilor lor, însă formula lui Tabit ibn Korra *nu este menţionată*. Cînd Mersenne a tipărit în 1634 o carte a sa cu titlul *Les préludes de l'harmonie universelle*, el vorbeşte şi de aceste două numere. Citind cartea, Fermat şi Descartes au aflat despre această pereche de numere prietene şi doi ani mai tîrziu Mersenne primeşte o scrisoare de la Fermat în care îi comunică perechea de numere ce a stabilit-o el.

— După cum se vede, perechea lui Fermat satisface exact formula stabilită de Ibn Korra pentru valoarea lui $n=4$, după cum numerele lui Descartes corespund aceleiaşi formule în cazul $n=7$!

— Asta-i adevărat, însă se pare că nici Fermat şi nici Descartes nu au cunoscut această formulă şi nici nu au aplicat-o. Iată cum descrie Fermat, metoda ce a folosit-o.

„Se începe cu progresia geometrică 2, 4, 8, 16 ..., iar dedesubt se pun numerele triple corespunzătoare. Apoi din

fiecare număr se scade 1 şi rezultatele se scriu pe rîndul de deasupra. În fine, în rîndul de jos se scriu numerele obţinute din produsul a două numere consecutive din rîndul trei, din care se scade numărul 1 :

5	11	23	47 ...
2	4	8	16 ...
6	12	24	48 ...
	71	287	1 151 ...

Dacă un număr din ultimul rînd este *prim*, ca de exemplu 71, şi tot aşa cel de deasupra lui, din rîndul întîi, ca 11, şi cel precedent lui, ca 5, atunci aceste numere conduc la numere prietene. Astfel, dacă se înmulţeşte 71 cu 4 se obţine 284, iar 5 înmulţit cu 11 şi cu 4 dă 220. La fel $1\,151 \cdot 2^4 = 18\,416$ iar $23 \cdot 47 \cdot 2^4 = 17\,296$".

— Se ştie ce metodă a folosit Descartes ?

— Da, o scrisoare a lui către Mersenne arată uimirea lui aflînd că a găsit perechea lui de numere prietene urmînd aceeaşi cale ca şi Fermat. Interesant este că formula lui Ibn Korra nu mai furnizează nici o altă pereche de numere prietene pentru vreo altă valoare mai mică decît $n<200$.

— Şi secolul al XVIII-lea nu mai aduce nici o noutate ?

— Ba, da, una fulminantă ! În 1747, Leonhard Euler a publicat un articol despre numerele prietene unde, alături de cele trei perechi cunoscute pînă la el, adaugă alte 30 de perechi de numere prietene, prima fiind $A = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ şi $B = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$, iar ultima $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 59 \cdot 179$ şi $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 358$. Cum a stabilit el aceste perechi s-a aflat abia după moartea sa, dintr-o broşură rămasă nepublicată pînă atunci, care dezvăluie încă şi alte perechi pe care le-a calculat. Metoda generală, care permite să se găsească numerele prietene, stabilită de Euler este descrisă în mod simplificat de E. B. Escott în revista „Scripta Mathematica", din 1946, într-un articol intitulat „Despre numerele prietene". Aici găsim trecute, în ordine cronologică, numărul perechilor de numere prietene, a descoperitorilor şi anul descoperirilor pînă în 1943. Iată acest tablou, pe care-l consider deosebit de interesant :

Pitagora	1	(540 î.e.n.)
Fermat	1	1636
Descartes	1	1638
Euler	59	1747—1750
Legendre	1	1830
B. N. I. Paganini	1	1867
P. Seelhoff	2	1884
L. E. Dickson	2	1911
T. E. Mason	14	1921
P. Poulet	65	1929
A. Gerardin	5	1929
E. B. Escott	233	1934
B. H. Brown	1	1939
Poulet şi Gerardin	4	1939
Total	390	

— Desigur că perechile găsite în secolul XX au fost calculate cu ajutorul maşinilor de calcul. De altfel şi numărul lor întrece cu mult pe al acelora din secolele trecute : 324 faţă de 66 de perechi cîte au fost găsite pînă în secolul nostru ! Frumos rezultat, îmi place foarte mult !

— Ei atunci, ca să ne mai odihnim, mai spune o trăsnaie de-a lui Gardner !

— Uite una destul de nostimă : un inginer, cunoscut pentru dexteritatea sa în a vedea corect structuri tridimensionale, servea cafeaua. Înainte de a pune cubul de zahăr în ceaşcă, îl aşază pe masă, în faţa lui, şi se gîndeşte : dacă trec un plan orizontal prin centrul cubului, secţiunea tăieturii va fi desigur un pătrat. Dacă îl trec vertical prin centru şi prin patru colţuri ale cubului, secţiunea va fi un dreptunghi alungit. Dar dacă trec planul astfel... ? Spre surpriza lui văzu că secţiunea va fi un hexagon regulat. Cum a fost făcută secţiunea ? Dacă latura cubului este de 1 cm, care va fi latura hexagonului ?

— Dacă-i vorba de un hexagon, planul trebuie să taie şase din muchiile cubului şi anume prin mijloacele acestor muchii. Hai să facem desenul şi să vedem cum arată ! (fig. 81) Latura hexagonului se află uşor, din triunghiul dreptunghic ABC : latura hexagonului $= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

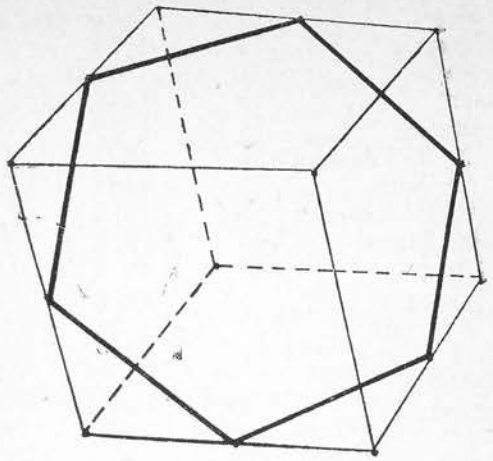


Fig. 81

— Perfect ! Acum, să vedem ce-mi mai propui mata ? Oare dacă tot am vorbit de Euler, ce-ar fi să atacăm *problema celor şapte poduri de pe Pregel ?*

— N-ar fi nimic, mai ales că ea este de multe ori discutată în cărţile de *Recreaţii,* la capitolul legat de reţelele geometrice sau de teoria labirintului şi de multe altele pe care le vom menţiona la vremea lor. Iată povestea care a creat acest amuzament matematic. Pe la jumătatea secolului al XVIII-lea, locuitorii oraşului Königsberg, azi Kaliningrad, găsiseră o distracţie destul de originală. Anume, în jurul insulei Kneiphof de pe rîul Pregel, ce trecea pe acolo, existau 7 poduri. Dintre acestea, 5 poduri duceau direct pe insulă, iar celelalte două traversau braţele rîului ce se bifurca în apropiere, aşa cum arată figura (fig. 82). Locuitorii se îndîrjeau să găsească o modalitate ca să străbată cele 7 poduri într-un circuit închis adică, pornind dintr-un loc să se întoarcă din nou acolo, după ce au trecut peste cele 7 poduri numai cîte o singură dată. Nereuşind, distracţia s-a transformat în obsesie şi s-a cerut ajutorul matematicienilor, care nu au găsit explicaţia. Astfel că problema, considerată imposibilă, a fost prezentată lui Euler. El a rezolvat-o în 1736 şi a prezentat Academiei din Petersburg (Leningrad) articolul

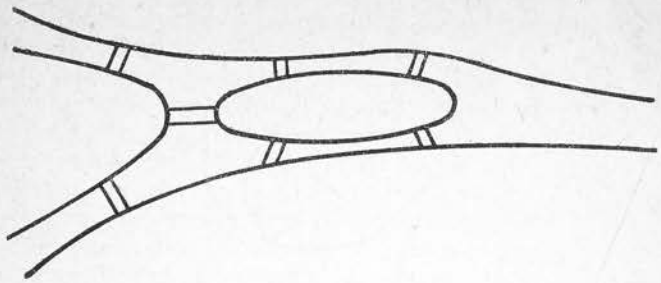


Fig. 82

intitulat : „Soluţia unei probleme ce aparţine geometriei de poziţie". Euler a arătat că, în adevăr problema aşa cum se prezenta ea, nu avea soluţie fiindcă aceasta nu depindea de lungimea, forma sau distanţa podurilor, ci numai de *poziţia,* adică de *situaţia* acestor poduri, unul faţă de altul. El a analizat problema şi a arătat cum ar trebui pusă ca să poată fi rezolvată.

— Îmi pare că Euler a satisfăcut în felul acesta una dintre dorinţele pe care Leibniz le-a exprimat într-o scrisoare din 1679 adresată lui Huygens : „Cred că ne trebuie încă şi o altă analiză, una geometrică, în stare să exprime direct *situm* (poziţia), aşa cum după algebră exprimă *magnitudinea* (mărimea)".

— Da în articolul amintit el îl citează pe Leibniz, iar cu această lucrare a lui Euler s-a început primul capitol al *Topologiei,* ramură a geometriei care va studia proprietăţile figurilor geometrice ce rămîn pe loc (*topos* în greceşte înseamnă loc, poziţie) la orice deformare.

— Şi cînd te gîndeşti că totul a pornit de la o joacă. S-au găsit unii oameni care au avut gust să se joace traversînd în fel şi chip podurile de pe Pregel şi s-au jucat atîta pînă ce l-au atras şi pe Euler în joc. Că articolul lui Euler, a plăcut mult o dovedeşte faptul că a fost tradus şi în limba franceză. Iată un motiv în plus ca să ne jucăm şi noi „de-a podurile". Cum a pus Euler problema, ca să-i găsească soluţia ?

— Mai întîi a făcut o schiţă care să prezinte, în forma cea mai simplă, elementele esenţiale ale problemei (fig. 83),

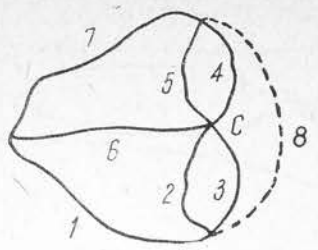


Fig. 83

adică insula — redusă la punctul *C* — şi podurile, reduse şi ele la nişte linii pe care le-a numerotat după poziţiile ce le aveau : 2, 3, 4, 5 şi 6 erau acelea ce legau direct insula de oraş, iar 1 şi 7 acelea care traversau cîte un braţ al rîului şi care deci se întîlneau şi cu 6, podul pe care se ajungea la insulă din partea aceea a oraşului în care rîul se desfăcea în cele două braţe. Desenul astfel făcut avea forma unei curbe închise, întretăiată de cîteva arce, în speţă de trei, care au extremităţile pe conturul curbei, sau cum i se spunea *reţelei*. Numind *nod* punctul unde se întretaie mai mult de două arce şi distingînd nodurile între ele prin ordinul lor, adică prin numărul arcelor din punctul de intersecţie respectiv, Euler a constatat că reţeaua lui avea 3 noduri de ordinul 3 şi punctul *C* ca un nod de ordinul 5, aşadar patru noduri impare. Problema era să stabilească în ce condiţii o reţea închisă poate fi străbătută printr-o trăsătură continuă.

— Şi atunci Euler a stabilit, următoarele trei teoreme : 1) Orice reţea închisă are un număr pereche de noduri impare ; 2) O reţea fără noduri impare este închisă ; 3) Orice reţea închisă, care are mai mult decît două noduri impare, nu se poate descrie complet printr-o singură trăsătură continuă. [45] Or, a treia teoremă explică imposibilitatea problemei.

— Euler le-a arătat locuitorilor din Königsberg şi *soluţia* care să-i mulţumească, aceea de a mai construi *al optulea pod*, prin care două dintre nodurile impare să se transforme în noduri pare. Dacă locuitorii de atunci nu au folosit sugestia lui Euler, cei din secolul XX au adoptat-o şi azi peste rîul Pregel trece un al 8-lea pod, care permite să se străbată

toate podurile numai o singură dată, astfel ca pornind dintr-un punct să te poţi întoarce în acelaşi loc.

— Desigur că nu putem încheia discuţia noastră, fără să ne amintim de pentagramă pe care pitagoreicii o desenau dintr-o singură trăsătură, deoarece ea are 5 noduri pare de ordinul patru (fig. 84), adică verifică teorema pe care nu o cunoşteau.

— Dar problema poate fi generalizată. Am văzut cînd am discutat despre pentagonul convex că pentagonul stelat se obţinea ducînd diagonalele în acest pentagon (fig. 85).

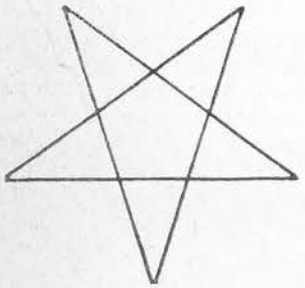


Fig. 84

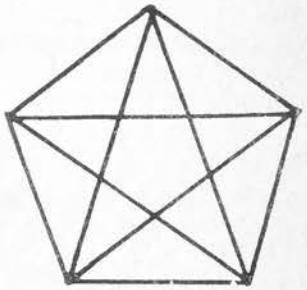


Fig. 85

Vîrfurile lui devin astfel noduri de ordinul patru. Aşadar, în toate poligoanele convexe cu un număr impar de laturi $(2n+1)$, ducînd diagonalele, vîrfurile lor devin noduri pare într-o reţea, ordinul nodurilor fiind $2n$. Deci poligoanele stelate respective, formate prin ducerea diagonalelor, pot fi desenate printr-o trăsătură continuă. Nu-i acelaşi lucru la pătrat sau la un poligon cu un număr par de laturi, vîrfurile de unde se duc diagonalele fiind atunci de ordin impar.

— Aş mai aminti şi de *pecetea lui Mahomed*, care şi ea a impresionat imaginaţia bogată a musulmanilor atunci cînd Mahomed a arătat că putea desena cu vîrful iataganului, fără a-l ridica de pe nisip, două semiluni care se întretaie (fig. 86).

— Da, şi această figură intră în aceeaşi categorie, fiindcă are patru noduri de ordinul patru. Şi, să nu uităm nici patrulaterul complet : el are numai două noduri de ordinul trei, aşa că se poate descrie tot printr-o trăsătură continuă (fig. 87). Grozav mă mai distra pe mine să-l desenez, deve-

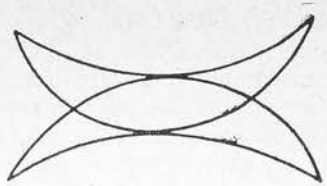


Fig. 86

nise o manie şi toate caietele mele de notiţe aveau pe foile lor această pecete !

— Fără să bănuieşti că va veni o zi cînd vei înţelege că acel desen ce te recrea poate, cuprindea în el o frumoasă teoremă ! Dar, ca să încheiem această discuţie, îţi mai arăt o figură (fig. 88) care are tot numai două noduri impare şi

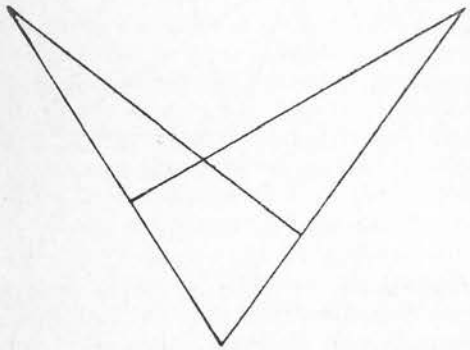


Fig. 87

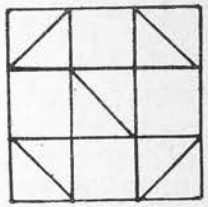


Fig. 88

deci se poate desena dintr-o singură trăsătură. Ea este menţionată în cartea de *Recreaţii* a lui W. Rouse Ball. [46]

— Ai spus „ca să încheiem această discuţie ? Cum vine asta ? Eu cred că de-abia ne-am făcut „încălzirea" ! Mi se pare că problema podurilor de pe Pregel l-a făcut pe Euler să caute şi dezlegarea *problemei labirintului* şi dacă *El* a considerat că-i demnă de atenţie şi această problemă, adică noi o vom trece cu vederea ? Încă de la începutul erei noastre, Pliniu cel Bătrîn aminteşte de labirintul pe care şi l-a dorit

un faraon, iar după el, regele Minos din Creta i-a poruncit lui Dedal, marele lui arhitect să-i construiască şi lui unul asemenea. Dedal a făcut-o, căci altfel cum ar fi putut ucide Tezeu Minotaurul şi, totodată, inima Ariadnei ? Ea îi dăduse ghemul de sfoară la promisiunea că o va lua cu el, dar şi-a uitat de promisiune cînd s-a văzut salvat ! Vezi, Bădie ? Noroc că mai ştiu şi eu oleacă de istorie, că altfel m-ai trage şi mata pe mine pe sfoară, ca odinioară Tezeu pe Ariadna. Aducem planul labirintului englez Hampton-Court ?

— Să-l aducem, fiindcă-i singurul pe care-l avem noi la îndemînă (fig. 89). Însă modele de labirint sînt destul de

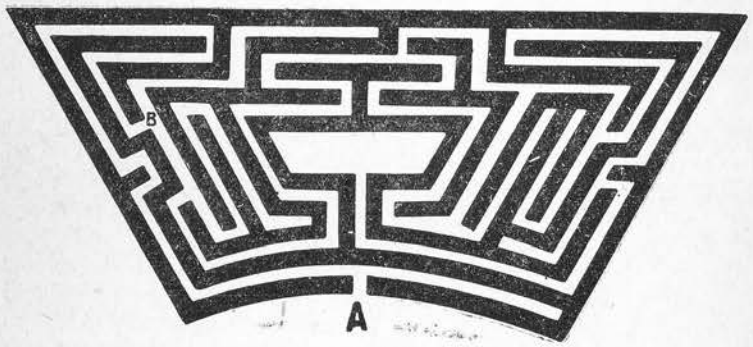


Fig. 89

multe, căci începînd din secolul al XII-lea ele s-au construit în diferite ţări. Ca să poată găsi metoda de a ieşi din labirint, Euler a asemuit drumul de la intrare şi pînă la ieşire cu o reţea, dar *nu o reţea închisă*, fiindcă atît ieşirea, cît şi centrul labirintului trebuie privite ca extremităţi de arc ce nu ajung la contur, adică sînt libere. Considerîndu-le ca noduri de ordinul unu şi ţinînd seamă că în reţea mai sînt şi alte noduri impare, rezultă că nici un labirint nu poate fi parcurs, străbătînd fiecare cărare numai o singură dată ca să poţi ieşi afară. Dar fiindcă el demonstrase teorema că o reţea este închisă dacă *nu are* noduri impare, a avut ideea să *transforme* toate nodurile labirintului în noduri pare, fapt ce se putea efectua dacă se convenea ca fiecare cărare *să fie parcursă de două ori, o dată într-un sens şi apoi în sens contrar*. În acest caz, drumul prin labirint se aseamănă cu o

rețea cu noduri pare și ieșirea din el este asigurată. În mod practic, se indică fiecare cărare străbătută cu o săgeată în sensul în care este parcursă și tot așa, cînd se ajunge la o răspîntie, se înseamnă cărarea aleasă și sensul. Dacă se dă peste o cărare ce a fost parcursă o dată, se parcurge numai-decît în sens invers, ocolindu-se orice drum care are pe el indicate ambele sensuri.

— Sînt așa de bucuros că am ieșit teafăr din labirint, fără firul Ariadnei, că-mi vine să mă-nfund în altul, poate și mai și! Ascultă și mata și spune-mi dacă notița asta din *Recreațiile* lui Ahrens [38, Bd. II, p. 215] nu-ți face cu ochiul? E vorba de o poveste: un rege din India a lăsat moștenire regatul său celor cinci fii ai lui, cerîndu-le să-l împartă în așa fel ca fiecare provincie să aibă o frontieră comună cu celelalte. Cu această poveste și-a început cursul, în 1840, August Ferdinand Möbius, așteptînd ca studenții lui să-i răspundă *că această împărțire este imposibilă!* Ei?

— Da, se pare că ai prins doi iepuri dintr-odată. Primul, *problema celor patru culori,* la care ai țintit să ajungi pe ocolite e o problemă care îmi place foarte mult, așa că-s dispus să o discutăm, dar totodată mi-ai adus și un iepure plocon, căci eu credeam pînă acum că problema aceasta a început să intereseze pe matematicieni cu vreo zece ani mai tîrziu și anume că ea a fost lansată de August De Morgan care, într-un articol din 1850, a arătat că nu a putut demonstra teorema: „Dacă patru culori sînt suficiente ca să se coloreze harta unei țări împărțită în regiuni fără ca două domenii alăturate să aibă aceeași culoare", deși, geografii aplică acest procedeu *în mod curent* fără ca să fi întîmpinat vreodată un neajuns! Problema a fost pusă din nou, în 1878, de Arthur Cayley, la Societatea matematică din Londra, iar în anul următor a publicat primul său articol „Despre colorarea hărților", în care demonstrează teorema: „Dacă o arie este împărțită, în orice fel, în alte arii, acestea pot fi colorate numai cu patru culori, în așa fel ca două arii care se ating să aibă culori diferite". Iar mai departe continuă așa: „În toate cazurile cunoscute se poate vedea *că patru culori sînt și suficiente. Dar n-am găsit o demonstrație generală...*". Iată și două desene făcute de el, care dovedesc că sînt necesare patru culori. În primul desen (fig. 90), suprafața este împărțită în trei sectoare de cerc înconjurat

de o coroană, desenul sau harta cere patru culori pentru a fi colorată. În a doua (fig. 91) numărul sectoarelor este pa-

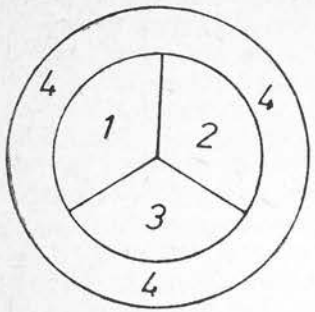


Fig. 90

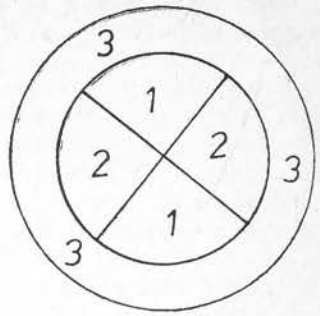


Fig. 91

tru, ceea ce arată că *sînt necesare numai trei culori* ca harta să fie colorată în condițiile cerute.

Articolul lui Cayley a trezit interesul pentru această problemă și foarte curînd Alfred Kempe a stabilit o demonstrație oompletă a teoremei, care părea că a satisfăcut toate condițiile. Din această cauză, mulți matematicieni au reluat demonstrația lui Kempe, căutînd să-i dea noi interpretări. Așa s-a făcut că, în 1890, J. P. Heawood a găsit o eroare de calcul în demonstrația lui Kempe și în lucrarea sa *Teorema despre colorarea hărții* el a corectat eroarea stabilită, trăgînd de data aceasta o concluzie definitivă, anume că „pentru colorarea oricărei hărți plane sau sferice *sînt suficiente cinci culori*". Desigur că acest rezultat nu a mulțumit și de atunci numărul celor ce s-au legat de demonstrarea teoremei celor patru culori s-a mărit nespus de mult. Un argument în favoarea acestei cercetări era și acela adus de Möbius, că nu se poate împărți o hartă — sau o suprafață plană — în cinci domenii, astfel ca fiecare dintre ele să aibă o frontieră comună cu *toate* celelalte patru. Prin urmare, rezulta de aici că nu-s necesare cinci culori, ci numai patru ca să se coloreze orice hartă. Cu toate acestea se pare că *problema este imposibil de demonstrat,* sub forma generală, pe calea logică obișnuită în matematică.

— Şi totuşi, după cîte ştiu însuşi Heawood a continuat să se ocupe de această problemă şi mai departe, căci demonstraţia lui despre *suficienţa celor cinci culori* nu dădea decît o *limită superioară* a numărului de culori necesare ca să se coloreze o hartă, fără să închidă problema celor patru culori.

— Povestea lui Heawood este foarte amuzantă, fiindcă eu am găsit, în 1949, un nou articol al lui, avînd acelaşi titlu ca şi acela scris cu 60 de ani în urmă, *Problema despre colorarea hărţilor*, şi, bineînţeles, că în aceşti 60 de ani el nu a încetat să publice şi alte articole despre acest subiect îndrăgit de el, pe care l-a privit din multe şi diferite puncte de vedere. Printre altele, el a calculat că probabilitatea ca să se ivească, la un moment dat, o hartă împărţită în 36 de regiuni, care *să nu poată fi colorată cu patru culori*, este mai mică decît $1 : 10^{10000}$. Şi pot să-ţi mai spun că am citit în revista „Science et Vie", nr. 713 din februarie 1977, următoarea notă în legătură cu teorema celor patru culori: „Teorema celor patru culori a fost demonstrată de ordinator în iunie 1976". Şi iată detaliile: „În 1972, Wolfgang Haken şi Kenneth Appel au început să cerceteze configuraţiile tip şi să caute procedeele ca să le reducă la patru culori. În 1974 au format un program pentru a fi analizat de un *ordinator*. În ianuarie 1976, programul era gata şi în iunie 1976, după analiza a 10 000 de configuraţii, reduse la 1 936 de tipuri elementare, aceste toate tipuri au fost reduse la patru culori şi deci teorema a fost demonstrată. Au fost necesare mai mult de 1 000 de ore pentru ordinator, adică au fost nevoie de mai mult decît trei mii de miliarde de operaţii logice".

— Desigur că aceasta nu-i chiar o demonstraţie, ci numai o verificare valabilă pentru 10 000 de configuraţii, dar este fantastică! Numai ascultînd această relatare cred că-i deajuns ca să afirmi că viaţa-i frumoasă şi merită să o trăieşti! Oamenii aceştia au muncit patru ani numai de dragul acestei teoreme *care nu aducea nici un folos practic*, dar care i-a înnobilat sufleteşte pe ei şi pe toţi cei care au urmărit-o. Află, Bădie, că sînt fericit, şi fiindcă mi-ai dat această mare bucurie am să-ţi citesc ceva foarte nostim, tot din cartea lui Gardner; la pagina 192 scrie: „Cîţi dintre cititori ştiu, spre exemplu, că, în 1957, compania „B. F. Goodrich" a obţinut un patent pentru banda Möbius? Acest

patent, purtînd numărul 2 784 834, se referă la o bandă de cauciuc turnată peste două roţi, folosită la transportul substanţelor fierbinţi sub abrazive. Atunci cînd bandei i se dă familiara jumătate de răsucire, ea se uzează în mod egal pe ambele feţe, — sau, mai corect, pe singura sa faţă".

La pagina 201 găsesc un alt *adaus*: „Compania Goodrich nu a fost prima care a brevetat o instalaţie bazată pe banda Möbius. La 16 ianuarie 1923, Lee De Forest a obţinut alt brevet, pentru o peliculă cinematografică fără sfîrşit, de tip Möbius, pe care sunetul putea fi înregistrat pe ambele feţe, iar la 23 august 1949, Owen D. Haris a obţinut un brevet pentru o curea abrazivă în formă de bandă Möbius. Ambele patente mi-au fost aduse la cunoştinţă de cititori. S-ar putea să mai fie şi altele." Ei, ce spui, îţi place?

— Nespus de mult, e în adevăr o surpriză de aceeaşi natură ca şi aceea cu folosirea pătratelor magice în agronomie! Banda lui Möbius a fost considerată ca o curiozitate şi nu-i carte de recreaţie matematică în care să nu o găseşti citată. Desigur că inginerul care a brevetat invenţia lui era un pasionat amator de amuzamente matematice!

— Cînd te gîndeşti că Möbius, unul dintre marii geometri ai secolului al XIX-lea, a fost luat cam peste picior cînd a prezentat, în 1858, Academiei de Ştiinţe din Paris, *Memoriul* său despre forma şi proprietăţile *suprafeţelor cu o singură faţă*, că ea a părut neserioasă marilor academicieni şi au făcut-o rătăcită!

— Îi înţeleg foarte bine. Îmbătrîniseră în problemele lor, legate de suprafeţele obişnuite, *cu două feţe*, una în interior şi alta în exterior sau, dacă-i vorba de un plan, o faţă deasupra şi alta dedesupt, care dacă le colorezi trebuie să foloseşti două culori ca să le deosebeşti şi acum, dintr-odată, vine un excentric din lumea-ntreagă, chiar dacă-i matematician cu renume, şi pretinde că poate exista o suprafaţă cu o singură faţă! Şi cum ajunge la ea? Ia o bandă de hîrtie *ABCD* (fig. 92), o răsuceşte şi îi lipeşte marginile, adică în

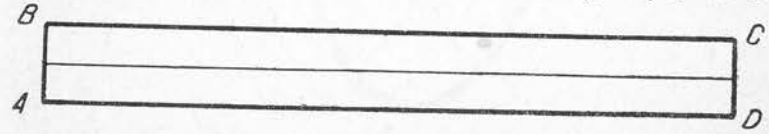


Fig. 92

loc ca punctul A să coincidă cu D şi B cu C, el lipeşte A lîngă C şi B lîngă D (fig. 93) şi cu această jucărie, bună de

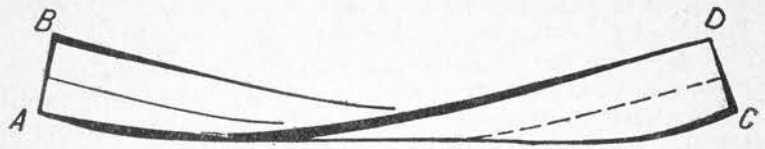


Fig. 93

adormit copiii, ei pretinde că a descoperit o nouă geometrie, geometria suprafeţelor cu o singură faţă !

— Da, Bădie, cred că aşa trebuie să fi discutat, în primele clipe, pînă ce s-au dezmeticit oamenii şi au recunoscut originalitatea descoperirii. Atunci au văzut că, în adevăr, dacă vrei să colorezi una dintre feţe, nu poţi folosi decît o singură culoare, căci pensonul trece nestingherit peste tot fără să-l oprească vreo margine, fiindcă banda răsucită nu are decît o singură margine, şi astfel te convingi că ea nu are decît o singură faţă. De aceea a şi fost numită *banda lui Möbius*. Banda aceasta e şi plină de surprize, căci nu ascultă de intuiţia obişnuită care-mi spune că dacă aş tăia-o după linia mediană, capăt două benzi avînd ca lăţime jumătate din lăţimea iniţială (fig. 94). Nu, dacă tai banda lui Mö-

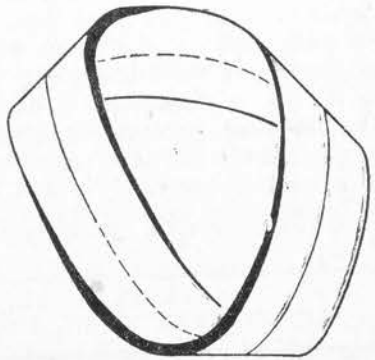


Fig. 94

bius de-a lungul ei nu se obţin două benzi răsucite, cum s-ar obţine dacă banda ar fi fost nerăsucită şi ar avea forma unui cilindru, ci se obţine o singură bandă, de două ori mai lungă şi nerăsucită, adică două feţe. Iar după ce banda lui Möbius fusese recunoscută, peste 24 de ani, un alt matematician de seamă, Felix Klein a realizat o altă suprafaţă cu o singură faţă, dar de data aceasta *închisă*, adică nemaiavînd, ca banda lui Möbius o *margine*. Suprafaţa care nu mai are nici o margine s-a obţinut prin lipirea marginilor unice ale două suprafeţe Möbius egale. Această suprafaţă se numeşte *torul unilateral* sau *garafa lui Klein*, fiindcă are oarecare asemănare şi cu una şi cu alta dintre aceste două suprafeţe (fig. 95).

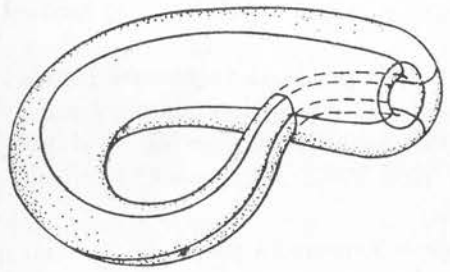


Fig. 95

— Acuma, dragă Nucule, mă duc să fac o cafea şi după aceea vedem noi ce mai facem.

— Foarte bine, fiindcă trebuie să-mi pun la punct nişte socoteli pe care vreau să ţi le arăt. M-ai învăţat odată să socotesc, acum mi-a venit şi mie rîndul să te-nvăţ pe mata să socoteşti !

— Mă rog, pregăteşte-te, că eu îndată-s gata.

— Uită-te mata aici, cum ştiu eu să fac simplificări : Consideră fracţia $\frac{26}{65}$; dacă ar fi fost alta, anume $\frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 5}$, simplificam 6 de la numărător şi numitor şi obţineam $\frac{2}{5}$, e drept ?

— Chiar așa de copilărește vrei să te joci ?

— Deloc, eu aplic exact aceeași metodă și la prima fracție ; tai pe 6 de la numărător și de la numitor și scriu $\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$. Procedez la fel și cu fracțiile $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$ sau $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$. Am greșit cumva ? Pot să-ți dau și alte exemple, dar mă opresc aici.

— Cu asemenea glume să-ți păcălești studenții tăi, dar nu pe mine. Problema se pune așa : Să caut numerele care satisfac ecuația $\frac{10x+y}{10y+z}=\frac{x}{z}$. De aici rezultă

$10xz+yz=10yx+xz$ sau $z=\frac{10xy}{9x+y}$; dacă fac $x=1$ am $z=\frac{10y}{9+y}$,

ecuație care trebuie rezolvată în numere întregi ; $y=1$ se exclude și rămîne deci $y=6$, de unde $z=4$ sau $y=9$, de unde $z=5$. Am găsit cazurile pe care mi le-ai prezentat. Acum pot face, pe rînd $x=2$, $x=3$, $x=4$. Pentru $x>4$ nu există soluții posibile.

— Dar aceste expresii îți plac ?

$$\sqrt{2\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{sau} \quad \sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}};\ \sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}};$$

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

— Nostime și ele. Înseamnă că se cere rezolvată ecuația

$\sqrt{x+\frac{m}{n}}=x\sqrt{\frac{m}{n}}$ adică $x+\frac{m}{n}=x^2\frac{m}{n}$, de unde rezultă

$$\frac{m}{n}=\frac{x}{x^2-1}$$

și dacă dăm lui x valorile 2, 3, 4, 5 găsim expresiile de mai sus :

pentru $x=2$, $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$

pentru $x=3$, $\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$ etc

— Și în același mod problema se poate generaliza pentru orice alți indici întregi. De pildă :

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{sau} \quad \sqrt[3]{2\frac{2}{15}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{15}} \quad \text{sau}$$

$$\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}} \quad \text{etc. [47, p. 75]}$$

— Fiindcă-mi cunosc eu bine nepotul și știu cam cîte parale face, spune-mi ce-mi ceri în schimb ?

— O nimica toată ! Să vorbim despre pardoseli sau pavaje ornamentale și, bineînțeles, înainte de toate despre grupurile de simetrie din plan și spațiu. Sînt probleme care încîntă sufletul și ochii și ar fi foarte nimerite ca să încheie discuțiile noastre de azi !

— Bine, dar de data aceasta te rog să iei tu conducerea.

— Accept sarcina, deoarece știu eu că n-ai să mă lași mata să duc greul fără să-mi dai o mînă de ajutor ! Mai întîi aș vrea să observ că și problemele acestea au preocupat omenirea chiar de la primele licăriri ale dorinței de înfrumusețare a spațiului din jur și de împodobire personală.

— Cred că trebuie să începem cu *simetria*, fiindcă acesta pare să fie *cuvîntul cheie* ori de cîte ori se vorbește fie despre ornamente, fie despre pavaje ori pardoseli etc. Pe de o parte, pentru că simetria exprimă ceva bine proporționat, echilibrat, și pe de altă ea arată concordanța dintre diferitele părți ale unui *tot*, adică înfățișează ceea ce este echivalent cu *ordinea*, *frumusețea* și *perfecțiunea*.

— O definiție precisă a simetriei ne-o dă numai geometria. Sub forma ei cea mai veche și cea mai simplă, aceea a *simetriei bilaterale*, a fost cunoscută din Antichitate. Un punct sau orice figură plană sau din spațiu se zice că este simetrică față de o axă, respectiv un plan (fig. 96), sau față

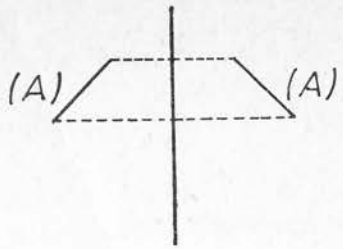


Fig. 96

de un punct dacă acea figură (A) se suprapune peste ea însăşi printr-o *reflectare* faţă de dreaptă sau plan sau, printr-o rotaţie de 360° (simetrie de rotaţie). Multe dintre desenele, sculpturile sau decoraţiile murale ale egiptenilor şi babilonenilor, chiar de prin mileniul al III-lea î.e.n., arată o perfectă cunoaştere a simetriei bilaterale. În arta greacă, sau în scrierile greceşti, ca, de pildă, la Platon, nici nu-i nevoie să mai remarcăm acestea. Se ştie că din cauza perfecţiei lor simetrii de rotaţie, pitagoreicii considerau cercul şi sfera ca singurele figuri geometrice perfecte.

— La o formulare mai generală a acestei noţiuni geometrice fundamentale se ajunge dacă se consideră simetria drept un caz particular al transformărilor geometrice congruente. Şi fiindcă vorbim de congruenţă, e bine să amintim că două figuri rigide sînt congruente cînd toate distanţele dintre două perechi de puncte corespondente sînt egale. În acest caz rezultă că şi unghiurile dintre perechile de linii corespondente sînt egale. În cazul poliedrelor, trebuie să adăugăm că două unghiuri triedre congruente prin suprapunere pot să coincidă şi atunci figurile se zic *direct congruente*, sau să se aşeze în sens opus unul altuia şi atunci ele se numesc *enantimorfe*. Toate figurile congruente derivă din trei transformări primitive : translaţia, care se poate reprezenta printr-un vector, fiindcă toate punctele corpului rigid se deplasează în aceeaşi direcţie şi cu aceeaşi distanţă, *rotaţia*, după o anumită axă şi un anumit unghi şi reflectarea, într-o anumită dreaptă sau plan. Odată aceste noţiuni fixate, putem defini simetria ca fiind transformarea geometrică a unei figuri în ea însăşi (sau a unui corp în el însuşi). [48].

— Vreau să accentuez că dacă *simetria* unei figuri plane sau din spaţiu se caracterizează prin totalitatea transformărilor care suprapun figura respectivă peste ea însăşi, prin aceasta s-a ajuns la *generalizarea noţiunii de simetrie bilaterală* pe care ai menţionat-o la început, fiindcă simetria se exprimă prin *totalitatea* unor anumite transformări şi nu numai printr-o simplă reflectare.

— Da, şi totalitatea acestor transformări reprezintă *gradul de simetrie a figurii respective*. Zicem că o figură este *asimetrică* dacă transformările se reduc la *transformarea identică*. Dar nu-i numai atît, mulţimea acestor transformări nu-i arbitrară, ci formează un grup, *grupul de simetrie al figurii considerate*.

— Atunci hai să spunem repede că o mulţime de transformări notate *A, B, C* ... formează un grup, dacă mulţimea este *închisă* faţă de ori ce fel de asocieri ale acestor transformări, adică *dacă există* : 1) proprietatea de asociativitate : $A\,(BC)=(AB)\,C$, oricare ar fi transformările *consecutive*, *A, B, C* etc. 2) *transformarea identică E*, astfel că $AE=EA=A$, oricare ar fi A şi 3) fiecărei transformări A îi corespunde o transformare inversă A^{-1} astfel că $A\,A^{-1}=A^{-1}A=E$. Numărul operaţiilor *distincte*, incluzînd şi identitatea se numeşte *ordinul grupului*, în cazul nostru al *grupului de simetrie*.

— Nu ne rămîne decît să cercetăm gradele de simetrie ale diferitelor forme poligonale, începînd cu cele mai simple, adică triunghiurile. Desigur că cel care mă tentează mai mult este triunghiul echilateral şi de aceea am să încep cu el (fig. 97). Ducînd înălţimile lui, care sînt şi axe de simetrie, rezultă că triunghiul echilateral se suprapune peste el însuşi prin trei reflectări — oglindiri (O) după înălţimile AO, BO şi CO şi apoi prin trei rotaţii (R) de 120°, 240° şi 360° în jurul centrului O. Aşadar, triunghiul echilateral are *şase simetrii*, care se pot nota în felul următor :

$$O_{AA'};\ O_{BB'},\ O_{CC'};\ R_{120°};\ R_{240°};\ \text{şi}\ R_{360°}=E.$$

După cum se constată, *transformarea identică* se obţine atît din două oglindiri succesive faţă de aceeaşi axă, din rotaţia de 360°, din trei rotaţii succesive de acelaşi unghi şi, de asemeni, din două rotaţii inverse una alteia.

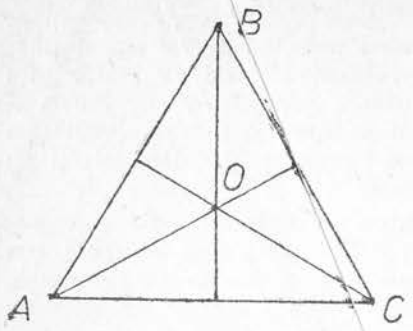


Fig. 97

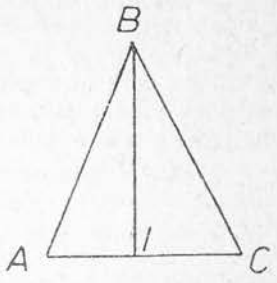


Fig. 98

In triunghiul isoscel (fig. 98) nu există decît o singură axă de simetrie (*BI*), avem deci o *simetrie* bilaterală. Celelalte două forme de triunghiuri sînt *asimetrice*.

— Cred că ar fi cazul să discutăm şi latura estetică a acestor triunghiuri, fiindcă dacă ne-am orienta după gradul lor de simetrie, ar trebui să admitem că triunghiul echilateral este cel mai frumos după care ar urma cel isoscel ; celelalte două nu mai prezintă nici un interes, estetic vorbind.

— Cred că lucrurile nu stau chiar aşa. Uite, în cartea lui Birkhoff, de pildă, este citată părerea lui Platon, exprimată în *Timeu :* „Dintre toate formele de triunghiuri, consider că cel mai frumos este acela în care dublul lui formează un triunghi echilateral". Aşadar, lui Platon îi plăcea mai mult un *triunghi dreptunghic*, fără nici un grad de simetrie, dar care are în schimb proprietatea de a fi jumătatea unui triunghi echilateral. E vorba aşadar de triunghiul dreptunghic cu un unghi de 60° şi o catetă egală iu jumătatea ipotenuzei. E drept că autorul explică această preferinţă astfel : „Dacă judecăm frumuseţea unui triunghi după capacitatea lui de a forma prin combinare alte figuri geometrice interesante, atunci nu există un altul comparabil cu triunghiul favorit al lui Platon. Căci cu el se poate forma triunghiul echilateral, dreptunghiul, paralelogramul, rombul, şi hexagonul regulat, dintre poligoane (fig. 99), precum şi trei din cele cinci poliedre regulate" [49, p. 22]. Tot Birkhoff mai arată că japonezii preferă să folosească formele asime-

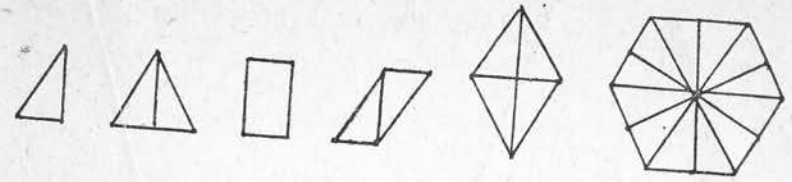


Fig. 99

trice, considerînd că simetria *este obositoare.* Însă, această părere nu este nici unanimă şi nici cea a autorului, care consideră totuşi că cele două triunghiuri, posedînd grade de simetrie, sînt superioare, din punct de vedere estetic, celorlalte. El mai face însă şi o altă observaţie, anume, legată de *orientarea* triunghiurilor *într-un plan vertical,* arătînd că numai acele triunghiuri echilaterale sau isoscele sînt frumoase care au două dintre laturi egal înclinate faţă de axa verticală considerată drept axă de simetrie, ele dau impresia de echilibru şi de armonie, căci *simetria faţă de axa verticală* este aceea cu care sîntem obişnuiţi din viaţa de toate zilele. Un triunghi isoscel cu axa de simetrie înclinată oarecum faţă de planul orizontal şi nu perpendicular pe el, aproape că nici nu mai apare ca isoscel şi deci nu face o impresie mai bună decît un triunghi oarecare, ci, din contra, pare *lipsit de echilibru.* La fel şi cu triunghiul echilateral care nu este aşezat în poziţia de echilibru, adică nu are o bază orizontală şi deci nu-i simetric *faţă de axa verticală,* pierde frumuseţea pe care o avea în plus din cauza simetriilor lui de rotaţie. Sînt foarte interesante părerile lui Birkhoff şi despre *patrulatere.* El le împarte în patru tipuri. În primul tip de patrulatere simetrice (fig. 100) se consideră pătratul,

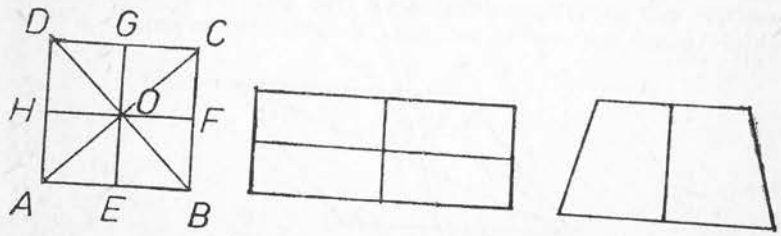


Fig. 100

dreptunghiul şi trapezul isoscel, toate avînd o axă verticală de simetrie. În plus *pătratul are o simetrie de gradul opt*, anume două oglindiri faţă de mediatoarele laturilor : EG şi FH, alte două oglindiri faţă de diagonalele AC şi BD şi, în fine, patru rotiri de cîte 90°, 180°, 270° şi 360° în jurul centrului O. Dreptunghiul are numai o simetrie de *gradul patru :* două oglindiri faţă de mediatoare şi două rotaţii de cîte 180° şi 360° faţă, de centrul de simetrie. Autorul nu dă o prea mare importanţă dreptunghiului de aur, deşi îl menţionează. În al *doilea tip de patrulatere simetrice* (fig. 101)

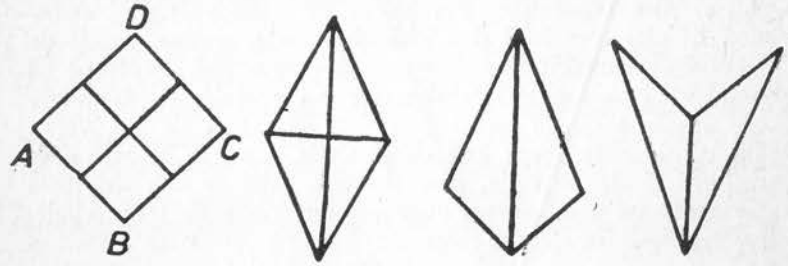


Fig. 101

el consideră din nou pe acelea cu *o axă de simetrie verticală*, însă aceste patrulatere au *două vîrfuri situate pe această axă şi nu o latură care să o intersecteze.* Acestea sînt : pătratul, rombul, deltoidul convex şi deltoidul concav. El consideră că orientarea pătratului cu laturile în poziţia verticală şi orizontală este superioară, din punct de vedere estetic, faţă de această nouă poziţie a lui. În al doilea tip de *patrulatere simetrice* este aşezat paralelogramul (fig. 102) care, ca şi triunghiul isoscel are *numai un grad de simetrie*, anume o *simetrie de rotaţie* în jurul centrului O, de 180°. Despre patrulaterele *asimetrice*, din nou, autorul atrage atenţia asupra acelora care au o mai largă bază orizontală şi încă asupra acelora care au două laturi paralele, dat fiind că, în acest caz, este îngrădită diversitatea direcţiilor către care trebuie să alerge ochiul. Dar, nu-l voi urmări mai departe în analiza estetică pe care o face asupra formelor poligonale cu mai mult de patru laturi, ci mă voi rezuma să caracterizez întregul grup de simetrii al poligoanelor regulate cu n laturi, fie ele convexe sau stelate. Acesta cuprinde n oglindiri sau reflectări faţă de cele n axe ce trec prin centrul lor şi n rotaţii de simetrie în jurul centrului, fiecare respectiv de un unghi egal cu $\frac{360°}{n}$; $(n=5, 6, 7, ...)$; $2\,\frac{360°}{n}$; ... ; $n\,\frac{360°}{n}$ în total $2\,n$ simetrii.

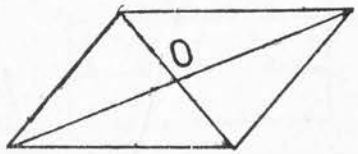


Fig. 102

— Aş vrea să ilustrăm cele spuse cu un exemplu, de pildă, să alegem pentagrama, pe care o avem şi în stema ţării (fig. 103).

— Nimic mai simplu : cele cinci axe de simetrie sînt *AO, BO, CO, DO, EO*. Ele permit cinci reflectări faţă de

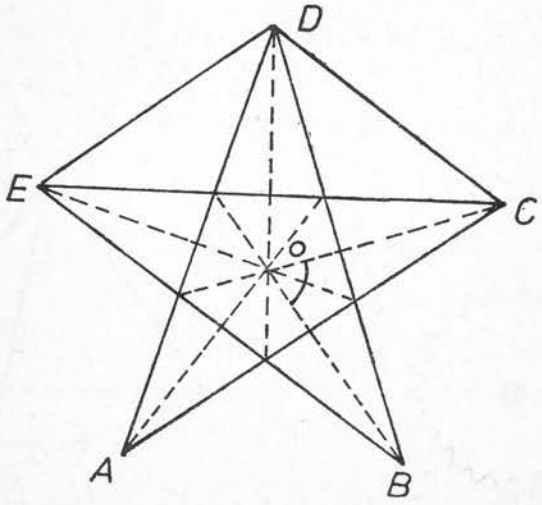


Fig. 103

fiecare axă în parte, care lasă pentagrama neschimbată. Aceste drepte se taie în O, formînd cele cinci unghiuri de rotaţie de cîte $\frac{360^\circ}{5}$; $2\frac{360^\circ}{5}$; ... ; $5\frac{360^\circ}{5}$, care lasă pentagonul neschimbat. Gradul de simetrie al pentagonului regulat sau stelat este deci 10.

— Cred că nu ai de gînd să te opreşti aici, căci pe lîngă poligoanele regulate există şi alte figuri care prezintă simetrii interesante. De pildă, discurile sau coroanele circulare ori roţile dinţate, le putem menţiona şi pe ele, deşi cazul lor îmi pare destul de banal. Primele, care prezintă simetrii de rotaţii de orice unghi, chiar şi infinitezimal, şi reflectările faţă de orice diametru, nu le-a numit Pitagora perfecte ? Celelalte, adică roţile dinţate nu au decît simetrii de rotaţie, rotaţiile avînd unghiurile determinate de numărul dinţilor. De pildă, în figura alăturată (fig. 104), $n=22$. Mai este însă un alt caz, pe care nu am să-l arăt acum, ci îl las pe mai tîrziu, acela al *figurilor plane infinite*.

— Te înţeleg, el se leagă de pavaje şi de ornamente, aşa că n-are rost să-l discuţi de două ori. În schimb, cred că ai să consideri cazul grupurilor de simetrie ale poliedrelor regulate ?

— Da, la ele mă gîndeam şi apoi, la grupurile cristalografice, numai că această problemă nu o mai putem trata tot aşa de amănunţit ca pe aceea din plan, deoarece în spaţiu mişcarea are mai multe grade de libertate, aşa că şi transformările punctuale congruente *ale unui corp în el însuşi*, cu alte cuvinte, operaţiile de simetrie sînt mai multe şi mai complicate. Ca să-ţi dau un singur exemplu, am să consider simetria prin *rototranslaţie* faţă de o axă A, care este o combinaţie între mişcarea de rotaţie şi cea de translaţie, *o mişcare elicoidală*, în care fiecare punct T al corpului se transformă într-un alt punct T', astfel : T se transformă în T'', printr-o rotaţie de un anumit unghi în jurul axei A, iar T'' se transformă în T' printr-o translaţie de un anumit vector, paralel cu axa de rotaţie [48, p. 101]. Aceasta-i numai una dintre noile simetrii care se adaugă celor pe care le cunoşti, căci mai există şi o *rotaţie-oglindire*, sau o *omotetie inversă* de care trebuie să se ţină seama. Bineînţeles că, în grupurile de simetrie ale poliedrelor regulate nu avem de-a face cu ele, ci numai cu rotaţii. Şi iată-le aşa cum sînt descrise în fiecare dintre cărţile pe care le avem pe masă : „*Grupul G_t al simetriilor tetraedrului* (fig. 105) este format din 12 rotaţii : patru rotaţii de cîte 120°, patru rotaţii de cîte 240° (opt rotaţii ternare), trei rotaţii de cîte 180° (binare) şi identitatea. *Grupul G_s al simetriilor cubului* (fig. 106) este format din 24 de rotaţii ; trei rotaţii de cîte 90°, trei de cîte 180° şi trei de cîte 270°, în jurul axelor ce unesc centrele feţelor opuse, patru rotaţii de cîte 120° şi patru rotaţii de cîte 240° în jurul diagonalelor cubului, şase rotaţii de

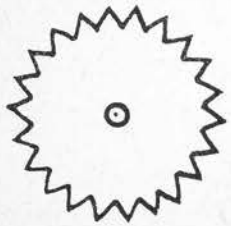


Fig. 104

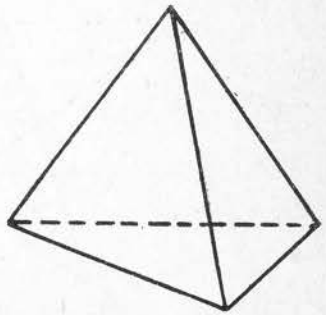


Fig. 105

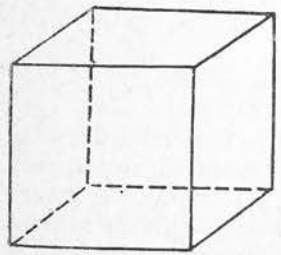


Fig. 106

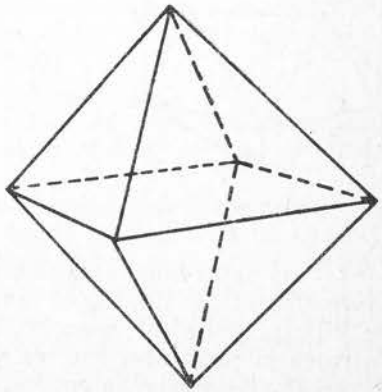


Fig. 107

cîte 180° în jurul axelor ce unesc mijloacele muchiilor opuse şi transformarea identică. *Grupul rotaţiilor octaedrului* (fig. 107) este format din aceleaşi rotaţii ca şi grupul G al simetriilor cubului în care este înscris.

— Era şi de aşteptat, o cerea *reciprocitatea* celor două poliedre şi ea se va repeta în cazul icosaedrului şi al dodecaedrului.

— *Grupul* G_p al *rotaţiilor icosaedrului* (fig. 108) cuprinde următoarele elemente : transformarea identică, şase rotaţii de către 72°, şase rotaţii de cîte 144°, şase de 216° şi şase de 288° în jurul axelor ce unesc vîrfurile opuse, zece rotaţii de cîte 120° şi zece de cîte 240° în jurul axelor ce unesc centrele a două feţe opuse, cincisprezece rotaţii de cîte 180° în jurul axelor care unesc mijloacele a două muchii opuse ; se obţin 60 de rotaţii despre care se poate arăta că sînt distincte şi reprezintă toate rotaţiile (simetrii ale) icosaedrului. *Grupul rotaţiilor dodecaedrului pentagonal* (fig. 109) rotaţiile (simetrii ale) icosaedrului sînt simetrii şi ale dodecaedrului pentagonal, prin urmare nu apare un grup nou de rotaţii. [48, p. 124—129]

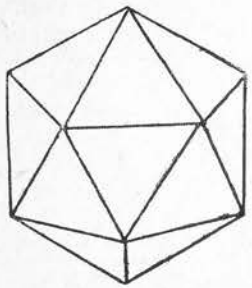


Fig. 108

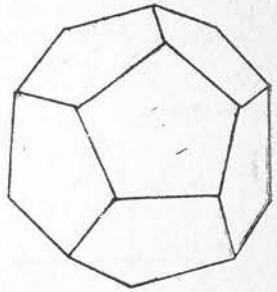


Fig. 109

— Aş putea numi această enumerare pe care mi-ai făcut-o, *cinematografică,* fiindcă în timp ce-mi citeai, înaintea mea se înfăţişa poliedrul respectiv, ca un cristal strălucitor, care se rotea în jurul unei axe, ca să revină la poziţia sa iniţială şi apoi, cu iuţeala fulgerului, executa o nouă rotaţie. De aceea, cînd te-am şi rugat să-mi citeşti mai rar şi chiar să

faci cîte o pauză, nu era pentru mine, ci pentru *octaedrul* care făcea nişte piruete, sau nişte rostogoliri, mai dihai decît o balerină. Cred că ar fi foarte odihnitor şi agreabil un asemenea film fără nici un cuvînt, nici o explicaţie, ci numai mişcarea lentă şi continuă ale acestor transformări congruente de simetrie, bine accentuate, ale tetraedrului, cubului, octaedrului, icosaedrului şi dodecaedrului. Şi încă, dacă s-ar mai adăuga acestora şi toate poliedrele regulate stelate, pe care noi nici nu le-am amintit... Nu mă mir deloc de Arhimede, de Pappus ori de Johann Kepler că au fost aşa de vrăjiţi de farmecul acestor poliedre. Căci aşa cum Pappus a continuat cu pasiune cercetările asupra poliedrelor regulate şi semiregulate ale lui Arhimede şi altor înaintaşi, cu tot atîta ardoare a continuat Kepler şi a dus mai departe, rezultatele stabilite de Pappus. Iată ce scrie H. Weyl într-un straşnic articol intitulat „Simetria" despre Kepler : „Înainte de a descoperi cele trei legi care îi poartă numele, Kepler a publicat, în 1595, *Mysterium cosmographicum,* în care face o încercare de a stabili o corespondenţă între distanţele planetelor sistemului solar şi poliedrele regulate pe care le înscrie şi circumscrie, în sfere. În figura 110 este prezentată construcţia prin care Kepler credea că a pătruns adînc în secretele Universului. Cele şase sfere corespund la şase planete. Saturn, Jupiter, Marte, Pămînt, Venus, Mercur, separate, în această ordine de cub, tetraedru, dodecaedru, octaedru şi icosaedru... El a încercat să găsească motivul pentru care natura a ales această ordine a corpurilor platonice şi a stabilit o paralelă între proprietăţile planetelor şi acelea ale poliedrelor regulate." [51, p. 720]

— Mă întreb ce s-ar fi întîmplat dacă Kepler ar fi cunoscut şi celelalte trei planete ce au fost descoperite ulterior ? Probabil că nu ar mai fi apărut *Mysterium cosmographicum !*

— Aici te înşeli şi iată de ce : Această lucrare, împreună cu altele, a fost tipărită în 1864, în cinci volume, cu titlul *Harmonice Mundi* şi cartea aceasta a avut destulă căutare, fiindcă se găsesc în ea multe idei ce au fost speculate de marii geometri din secolul al XIX-lea. Dar nu despre asta vreau să-ţi vorbesc, ci să răspund la întrebarea ta. După 1930, adică *după ce toate planetele sistemului nostru solar au fost descoperite,* s-a mai găsit un îndrăgostit de poliedre şi de lucrarea

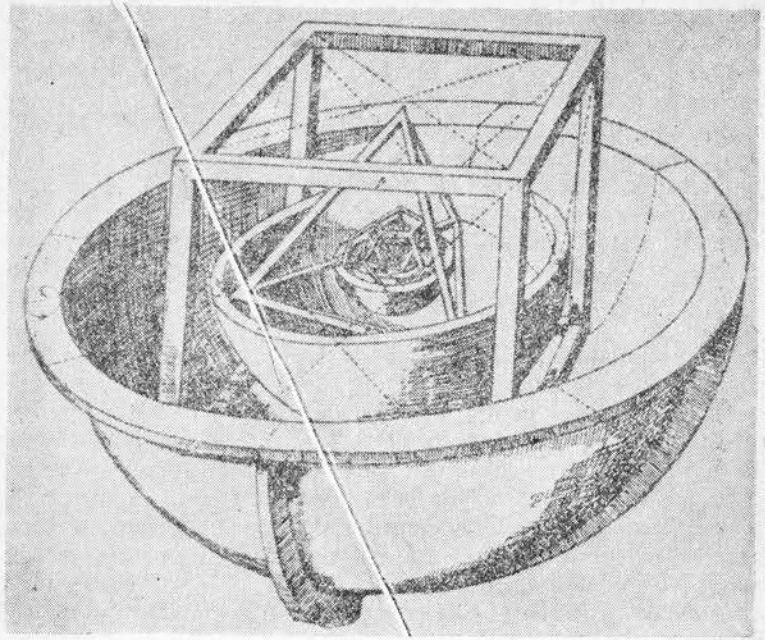


Fig. 110

lui Kepler, care s-a hotărît să ducă mai departe ideile lui Kepler, de acolo de unde le-a lăsat el. Francis Warrain, căci așa îl chema pe entuziastul nostru, a adăugat poliedrelor regulate convexe și pe acelea stelate regulate și astfel a întocmit tabele după tabele prin care a căutat să dovedească posibilitatea de a arăta prin aceeași metodă *a corespondenței dintre poliedrele regulate și toate planetele sistemului solar,* inclusiv micile planete, că există armonia visată și căutată de Kepler.

— Și a publicat această lucrare ?

— El personal nu, căci a murit în 1940, dar a încredințat-o unui prieten care a tipărit-o în 1942, cu titlul : *Essai sur l'Harmonices Mundi ou Musique du Monde de J. Kepler,* par Francisc Warrain.

— E rîndul meu să-ți spun și eu o poveste la fel de încîntătoare, dacă nu și mai și ! Aceea despre *grupurile cristalografice,* fiindcă mi se pare că exemplul cel mai uimitor de

simetrie din lumea anorganică îl prezintă cristalele. Deși ele au fost cunoscute și admirate încă din Antichitate, nu s-a întreprins nici un studiu sistematic asupra lor mai înainte de secolul al XVII-lea. Iar peste un secol s-a ajuns la uimitoarea descoperire că într-un cristal atomii se află la distanțe regulate între ei, așadar că acești atomi formează în spațiu un sistem regulat de puncte sau o *rețea spațială regulată.* Or, dacă un cristal se definește ca un corp omogen care are o structură de rețea spațială, rezultă că i se pot stabili elementele lui de simetrie. Astfel, după ce s-au grupat în *clase cristaline* toate cristalele ale căror simetrii aparțin aceluiași grup, s-a stabilit că există *32 de clase cristaline* care, la rîndul lor, se pot grupa în *7 sisteme cristaline.* Rămînea să se rezolve ultima și cea mai grea problemă : cîte și care sînt toate modurile posibile, diferite unele de altele, de a se repartiza în spațiu, în mod regulat, obiecte identice și de formă arbitrară ? Această problemă a fost rezolvată, mai întîi, în 1885, de matematicianul rus E. S. Fedorov, apoi, independent și prin metode diferite, de matematicianul german A. Schönfliess, în 1889, și de matematicianul englez W. Barlow, în 1894. Toți trei au stabilit că există *230 de grupuri punctuale spațiale.* Iar proba materială a acestor rezultate teoretice a fost făcută în 1912, cînd Max von Laue a găsit metoda de a cerceta *natura internă a cristalelor cu ajutorul razelor X.*

— Foarte interesantă această dare de seamă, *numai că* nu văd unde-i povestea aceea „și mai și" ?

— Vine și ea, *numai că* am vrut să pun la încercare răbdarea matale... Faptul că într-un cristal atomii sînt așezați în mod regulat, formînd o rețea regulată de puncte, i-au întors pe unii matematicieni — și nu numai pe unul — cu două milenii și jumătate în urmă, la *numerele figurate ale lui Pitagora,* căci, te rog să-mi spui, ce erau numerele spațiale figurate, altceva decît niște *rețele spațiale regulate ?* Aceste observații le-am găsit într-un strălucitor articol scris de Philippe de Corbeiller [52] care observă că prin această distribuție regulată a atomilor dintr-un cristal s-a ajuns la o „cuantizare a spațiului" și că, prin urmare, „cristalele se conformă (se supun) geometriei lui Pitagora. Geometria lui Euclid este geometria liniilor continue ; a lui Pitagora a șirurilor de puncte. După ce Euclid a formulat geometria sa, s-a renunțat la vechea geometrie a lui Pitagora. Savanții de mai

tîrziu — Arhimede, Descartes, Newton, Maxwell — s-au adîncit în această geometrie şi fizică a continuului şi au descoperit calculul diferenţial, gravitatea universală şi electromagnetismul. Dar, în ultimii 60 de ani, o nouă revoluţie a avut loc şi oriunde ne uităm găsim că ceea ce era continuu este în realitate compus din atomi..."

— Da, un foarte bun argument care să justifice, alături de altele, avîntul ce l-a luat teoria numerelor şi aceea a grupurilor discontinue.

— În articol este şi un exemplu foarte frumos prin care arată cum au stabilit, de pildă, cristalografii *că anumite simetrii cristaline sînt posibile, iar altele nu,* pe baza *geometriei pitagoreice.* Dacă se consideră pătratul ca o reţea cristalină plană, după cum am văzut ea are 4 simetrii de rotaţii. Dar, dintr-o reţea pătrată de puncte *nu se poate face una octogonală regulată* (fig. 111), căci fiecare latură a pătra-

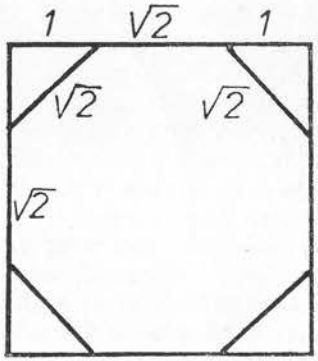


Fig. 111

tului ar trebui împărţită în trei părţi ale căror lungimi să fie proporţionale cu numerele $1, \sqrt{2}, 1$, aşadar iată că apare numărul iraţional $\sqrt{2}$ printre numerele întregi ale punctelor unei laturi ! Rezultă de aici că simetriile octogonale au trebuit excluse dintre grupurile spaţiale regulate.

— Dacă ne referim la timp, şi nu la spaţiu, atunci *simetria* se traduce prin *repetiţie la intervale egale,* e *ritmul* din

muzică. Există oare şi un ritm, şi în marile idei din matematică ?

— Asta nu ştiu, dar eu voi considera acum un alt ritm, nu în muzică, ci în *geometrie,* care apare cînd e vorba de *parchetaje* sau de *ornamente.*

— Cu alte cuvinte, ai atins ultimul punct al ordinei de zi !

— Încerc să-l ating. După cum ştii mata foarte bine, acoperirea unei suprafeţe plane cu poligoane aşezate în aşa fel ca să nu lase nici un gol între ele se numeşte *pardosire, parchetare, pavare* sau şi *mozaicare.* Cele mai vechi exemple se găsesc în Egipt, Babilon şi la grecii antici. Pitagoreicii au arătat că există numai *trei posibilităţi* de acoperire ale unui plan *cu poligoane regulate şi de acelaşi fel,* anume cu triunghiuri echilaterale, pătrate şi hexagoane. E uşor să stabilim şi noi această restricţie impusă *pavării regulate :* Fie n numărul laturilor unui poligon regulat şi p numărul poligoanelor regulate care trebuie să se întîlnească într-un punct din planul de pavat. Suma unghiurilor interioare ale poligonului fiind $(n-2)\pi$, înseamnă că mărimea unui unghi al lui este $A=\frac{(n-2)\pi}{n}$ şi el trebuie să fie egal cu $\frac{2\pi}{p}$, dat fiind că suma unghiurilor din jurul unui punct este 2π. Avem de rezolvat ecuaţia :

$$\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{p} \text{ sau: } n(p-2)=2p$$

în numere întregi. De aici rezultă $3 \leqslant p \leqslant 6$. Pentru $p=3$, $n=6$ şi $A=\frac{2\pi}{3}=60°$, pentru $p=4$, $n=4$ şi $A=\frac{\pi}{8}=90°$ iar pentru $p=6$, $n=3$ şi $A=\frac{\pi}{3}=120°$. Alte valori pentru p sînt imposibile, căci dau pentru n valori mai mici decît trei (fig. 112, 113, 114). *Pardosiri semiregulate,* adică acelea în care se folosesc mai multe feluri de poligoane regulate, dar cu condiţia ca în fiecare vîrf să se găsească colţurile aceloraşi poligoane regulate şi în aceeaşi ordine ciclică, au fost considerate mult mai tîrziu. Ele sînt în număr de 8 şi cuprind combinaţii de poligoane cu 3, 4, 6, 8 şi 12 laturi

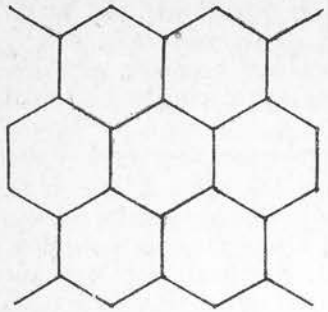


Fig. 112

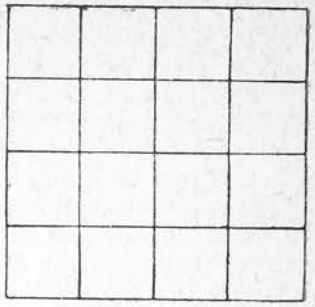


Fig. 113

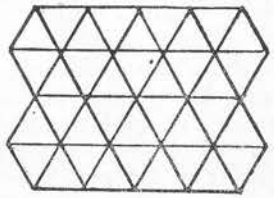


Fig. 114

(fig. 115—119). Iar cazul cel mai general, cînd planul se acoperă cu un model repetat, se compune din 17 grupuri de simetrie diferită. Acest număr a fost dedus folosind aceleași metode ca și în cazul simetriilor cristaline. Rezultatele mă fac să mă întorc iar la articolul lui Le Corneiller, ca să-ți mai citesc o observație curioasă pe care o face : „În matematică există teoreme care ne arată că sînt numai anumite posibilități de a se combina anumite lucruri și că nu sînt mai multe. Pavajele regulate cu pătrate și acelea cu hexagoane sînt un exemplu. Cu mult înainte de Euclid, geometrii s-au întrebat : Putem pava o dușumea cu plăci poligonale regulate, oricîte laturi ar avea ele ? Răspunsul a fost : nu. Numai trei feluri de plăci regulate pot fi folosite : triunghiulare, pătrate și hexagonale... Poate că această primă concluzie să nu fie chiar așa de surprinzătoare, dar următoarea este — cel puțin Platon a considerat-o așa. Un cub este un solid mărginit de șase fețe pătrate egale. Putem construi poliedre

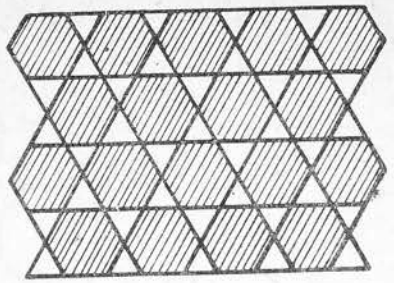


Fig. 115

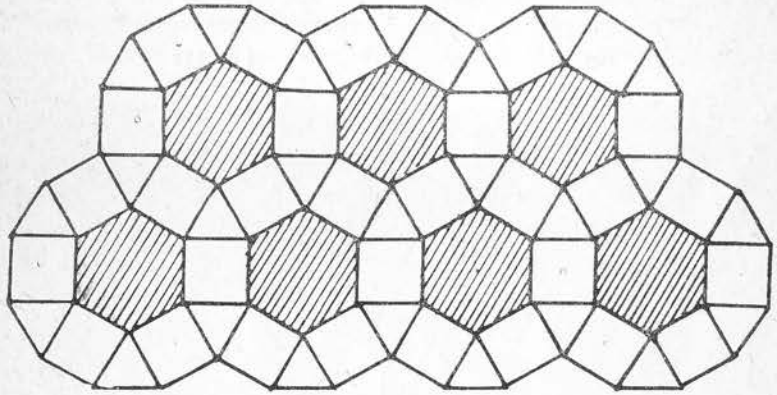


Fig. 116

cu un număr oarecare de fețe regulate egale ? Răspunsul este iarăși : nu. Sînt posibile numai cinci poliedre regulate și nu mai multe... Matematicienii au dovedit că elementele de simetrie ale cristalelor se pot grupa în 32 de moduri diferite, dar nu mai multe..., că sînt exact 230 de moduri diferite de a distribui obiectele identice de formă diferită în rețele spațiale regulate..." Am mai putea adăuga și noi că sînt numai 17 posibilități de pavare neregulată și nu mai multe, ce zici de asta ?

— Nimic. Legi naturale pe care matematicianul are marea favoare de a le putea cunoaște prin calcule. S-ar putea adăuga la acestea o mulțime altele : O ecuație algebrică de

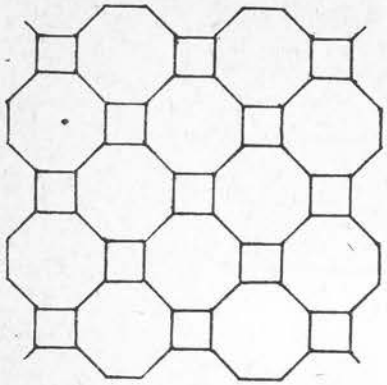


Fig. 117

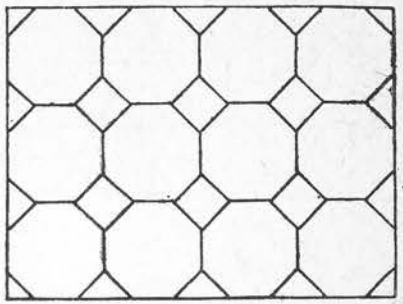


Fig. 118

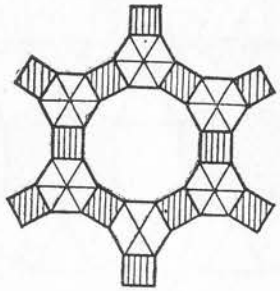


Fig. 119

gradul n are n rădăcini şi nu mai multe, suma unghiurilor unui triunghi plan este 180° şi nu mai mult ş.a.m.d.

— Văd eu că n-am cu cine face filosofie, aşa că mă întorc la simetriile mele : Orice figură care prezintă elemente de simetrie sau care se poate repeta oricît de mult, este un *ornament*. De pildă, ornamentele egiptene găsite în unele morminte din Teba erau formate din spirale ce se repetau nedefinit, acoperind planul. Configuraţii compuse pe jumătate din figuri geometrice, pe jumătate din vegetale, erau folosite în arta miceniană. Grecii au folosit mozaicurile geometrice. Tot figuri geometrice au folosit şi arabii cînd au decorat

vestitele lor moschei din Orient sau maurii pe acelea din Spania. Acelaşi principiu, al poligoanelor identice, se foloseşte şi cînd se lucrează dantelele. Diferite modele geometrice sau florale se folosesc în cusăturile naţionale sau la ţesutul covoarelor. Peste tot, în aceste ornamente, mai mult sau mai puţin complicate, intervin simetriile plane infinite formate din simetrii transversale de-a lungul grupului de figuri care trebuie repetat. De asemenea, pot apărea şi simetrii longitudinale sau simetrii prin oglindire. În cartea lui Martin Gardner, pe care am mai folosit-o azi, am găsit o informaţie care cred că are să te intereseze : „artistul olandez Maurits C. Escher a aplicat multe din cele 17 grupuri de simetrie la mozaicuri în care drept regiuni fundamentale sînt folosite forme de animale. Unul din uimitoarele mozaicuri ale lui Escher reprezintă un cavaler pe calul său (fig. 120). La prima vedere, modelul cavalerului pare să fie rezultatul trans-

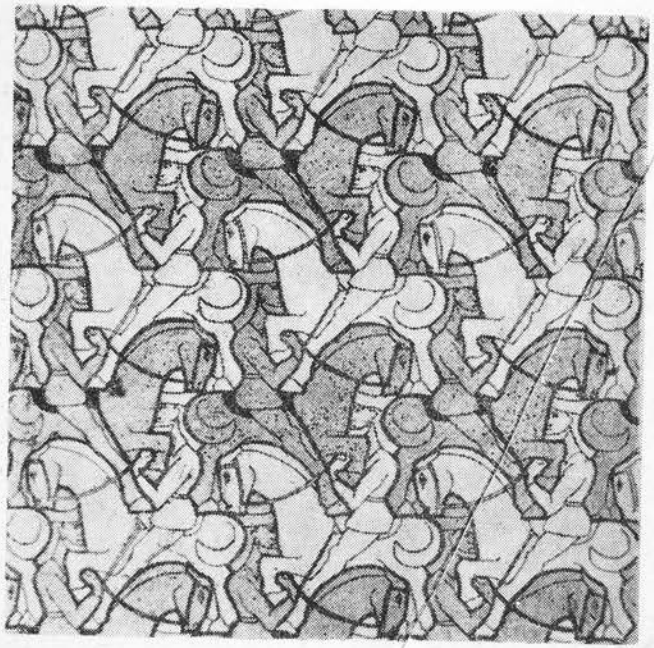


Fig. 120

lației unei configurații de bază de-a lungul unor axe verticale și orizontale : dar, la o examinare mai atentă, se constată că și fondul este construit din aceeași configurație de bază. Grupul de simetrie pentru acest model este, de fapt, generat de așa-numitele „reflexii alunecate" — o translație a configurației însoțită de o inversare a acesteia prin reflexia în oglindă. Riguros vorbind, aceasta nu este o mozaicare, deoarece regiunea constitutivă de bază nu este un poligon. Modelul aparține unei clase curioase de mozaicuri, în care forme neregulate, dar toate identice, se întrețes, umplînd planul... Escher este un pictor căruia îi place să se joace cu structurile matematice. Există o respectabilă școală estetică, al cărui crez este „arta — o formă de joc" și o la fel de respectabilă școală matematică ce consideră toate sistemele matematice drept niște jocuri fără sens, jucate cu anumite simboluri și în concordanță cu reguli dinainte stabilite." [44, p. 199]

— Ce părere ai Bădie despre ultimele rînduri ?

— Mă bucur că nu sîntem numai noi care avem gust de joacă, mai sînt și alții !

FRUMOSUL SE MĂSOARĂ ?

— Am oprit cartea lui Birkhoff la mine, ca s-o citesc pînă ne vom întîlni. Eram foarte curios să aflu cum a reușit autorul să stabilească o *unitate de măsură* pentru acel inefabil ce caracterizează *frumosul*, și ce unitate a folosit ? *Centimetru*, ca pentru lungime (L), *gramul*, ca pentru masă (M), *secunda*, ca pentru timp (T) sau poate că a stabilit o măsură compusă, așa cum este, să zicem, erg-ul ($L^2M\,T^{-2}$) (cuvînt ce derivă din *ergon* și înseamnă *muncă*) pentru *energie* ?

— Te-am priceput, Bădie. Pînă acum mata considerai valabilă formularea pe care o dăduse Leibniz artei : „ca cea mai înaltă expresie a unei aritmetici interioare și inconștiente" și dintr-odată ai înțeles că secolul nostru, lăsînd artei calitatea de *interioară*, o consideră expresia unei *aritmetici conștiente*. Da, Bădie, pentru că în secolul nostru s-a văzut că arta implică *dibăcie*, *organizare* și *selectivitate*. Nu se poate zbura, imitînd o pasăre, așa cum au încercat-o atîția în trecut, pînă și marele maestru Leonardo da Vinci. Ca să se poată zbura au trebuit *cunoscute* și *stăpînite* legile zborului exprimate matematic. La fel și cu frumosul, ca să poată fi stăpînit s-a creat, sau, mai bine zis se creează — căci procesul nu s-a încheiat încă — o teorie științifică bazată pe formule matematice, care să arate, prin relațiile dintre formă și senzație, care-i înțelesul percepției estetice.

— Să știi că mi-a plăcut această carte și citind-o îmi spuneam că *trebuie* să-i accept ideile, care, de fapt, și într-o oarecare măsură, pluteau în aer încă din Antichitate. Căci ce a făcut Pitagora cînd a stabilit raporturile muzicale și consonanța, sau cînd a admis existența acelui raport *incomensurabil* dintre segmente, pe care, peste secole, în admirația lui nemărginită, Leonardo da Vinci l-a numit *tăietura de aur* ? Sau, cînd la sfîrșitul veacului trecut, Fechner a căutat să

stabilească, pe cale statistică, printr-o anchetă, care, dintr-o serie de dreptunghiuri este cel mai frumos? Iată motivele pentru care cred, dacă ești de acord, să începem discuția noastră, pe care o prevăd foarte strălucitoare dacă mă iau după vraful de cărți cu care ai venit, pornind de la cartea lui Birkhoff.

— Cum să nu fiu de acord? Mai ales că prin stilul lui clar și precis, autorul ne va îndruma direct înspre locul ce-l căutăm. Dovadă cum începe: „Multe percepții auditive sau vizuale sînt întovărășite de un anumit simț intuitiv al valorii, cu totul deosebit de sentimentul senzual, emoțional, moral sau intelectual. Estetica se ocupă în special cu acest sentiment estetic și cu obiectele estetice care-l produc. Există numeroase feluri de obiecte estetice și fiecare trezește o senzație deosebită de frumos. Aceste obiecte se împart în două categorii, unele, ca apusul Soarelui, se găsesc în natură, pe cînd celelalte sînt create de artiști. Calitățile primei categorii sînt, mai mult sau mai puțin accidentale, pe cînd a doua categorie apare ca expresia liberă a idealurilor estetice. Din cauza aceasta arta, mai mult decît natura, procură materialul principal al esteticii".

— E adevărat că pînă acum nu a spus nimic nou, dar noutatea apare foarte curînd, chiar în paragraful următor, cînd examinează *natura experienței estetice.*

— Iat-o: „O experiență estetică tip cuprinde trei faze succesive: 1) o sforțare preliminată a atenției, necesară actului de percepție și care crește în raport cu ceea ce vom numi *complexitatea* (*C*) a obiectului; 2) sentimentul valorii sau *măsura estetică* (*M*) care răsplătește acest efort și, în sfîrșit, 3) realizarea că obiectul prezintă o anumită armonie, simetrie sau *ordine* (*O*), mai mult sau mai puțin ascunsă, care pare necesară efectului estetic". De aici el stabilește formula $M = \frac{O}{C}$, care se poate traduce astfel: Cînd se dă o clasă de obiecte estetice, *măsura estetică* a fiecărui obiect se stabilește prin *ordinea elementelor expresive* ale obiectului, și este cu atît mai mare cu cît și *densitatea* relațiilor de ordine este mai mare și, totodată, cu cît *complexitatea* acelui obiect este mai mică. Condiția estetică: „Unitatea în varietate", spune Birkoff, este strîns legată de această formulă. [49, p. 4]

— Sau, așa cum amintește, tot el, de formula lui Hemsterhuis din secolul al XVIII-lea: „Frumusețea înseamnă să exprimi cît mai multe idei în cît mai puțină vreme".

— Dar, mult mai interesante decît aceste motivări ale formulei stabilită de el îmi apar observațiile lui legate de însăși *concepția măsurii estetice:* „Este imposibil să se compare obiecte de tipuri diferite: — un vas și o melodie — ... Pentru ca o comparare *să fie posibilă,* clasele trebuie restrînse suficient, ... dar chiar și cînd aceasta s-a realizat, preferințele diverșilor indivizi variază după gustul și experiența lor artistică. De multe ori și preferințele aceluiași individ se schimbă cu timpul. De aceea, aceste comparații estetice, ale căror măsură estetică *M* înseamnă indicatorul caracteristic, vor avea un înțeles real numai dacă reprezintă judecata normală sau medie a unui grup selecționat de observatori. De exemplu, considerînd muzica Vestului, e natural să se stăruie asupra părerilor acelora care sînt obișnuiți cu ea. Prin urmare, noțiunea de măsură estetică *M* se aplică numai cînd clasa de obiecte este restrînsă în așa fel încît să fie posibilă compararea direct intuitivă a obiectelor. În acest caz, aranjarea în ordine a măsurilor estetice reprezintă aprecierea estetică a unui *observator normal idealizat*".

— Aceste observații restrîng mult domeniul de aplicabilitate a formulei, cum era de altfel și de așteptat, fiindcă în aceste aprecieri estetice, oricîte măsuri de precauții s-ar lua, factorii subiectivi nu pot fi complet eliminați.

— M-ai întrebat, cînd am venit, despre cărticica asta albastră care de-abia o pot ține în mînă. Iat-o, se cheamă *The mathematical basis of the arts* și autorul ei este Joseph Schillinger [53]. A fost tipărită cu 10 ani mai tîrziu decît cartea lui Birkhoff și te-ai aștepta să găsești vreo aluzie la ea, dar nu-i nici una. Autorul îl ignoră, iar părerile lui asupra bazei matematice a artelor se îndreaptă în alte direcții. El definește arta ca „un sistem de simboluri integrate într-un tot armonic. Astfel, egiptenii, grecii și hindușii au stabilit tipurile de frumusețe ce se exprimă prin anumite simboluri corespunzătoare relațiilor armonice integrate într-un tot". [53, p. 34] Printr-o *relație armonică* autorul înțelege rapoartele numerice ce se exprimă prin termenii șirurilor despre care am vorbit, termeni prin al căror raport se aproximează tăietura de aur, iar prin *tot armonic,* un complex de grupuri

armonice, ca, de pildă : proporţiile care aparţin spaţiului ocupat de imaginea creată, sau relaţiile armonice care constituie distribuirea elementelor din imaginea însăşi, sau corelaţia dintre relaţiile armonice ale imaginii şi relaţiile armonice ale spaţiului ocupat de imagine ş.a.m.d. Toate aceste mărimi, care au la bază şi noţiunea de uniformitate, au fost cercetate şi calculate de J. Schillinger, timp de 25 de ani, iar rezultatele au fost adunate şi se găsesc în aceste aproape 700 de pagini, tipărite după moartea autorului. Desigur că noi nu le vom parcurge, fiindcă nici nu intră în programul nostru, dar am ţinut să-ţi prezint acum această carte numai ca să-ţi arăt că părerile lui Birkhoff, legate de măsurarea frumosului sau a emoţiei estetice, nu au fost unanim acceptate nici chiar de acei care erau în căutarea unei baze matematice a artelor. În locul formulei propusă de el, J. Schillinger a preferat să pună la baza investigaţiilor sale vechea mărime a tăieturii de aur, pe care, în schimb, Birkhoff a înlăturat-o din consideraţiile sale.

— O spune răspicat ?

— Da, n-am insistat asupra acestui lucru, atunci cînd am discutat despre simetriile patrulaterelor, dar în cadrul acelei probleme Birkhoff avea un paragraf intitulat „Dreptunghiul de aur şi altele" în care, după ce defineşte tăietura de aur şi îi face un scurt istoric, unde intră şi cercetările experimentale ale lui Fechner legate de dreptunghiul cu dimensiunile în raportul 1,618, aminteşte despre dreptunghiul care-i plăcea lui Platon, în care raportul laturilor este 1,732, apoi de alte dreptunghiuri la fel de remarcabile şi termină afirmînd că : dreptunghiul de aur nu diferă în nici un chip de altele prin aceea că ar poseda o proprietate geometrică deosebită." Totuşi, revenind la ideile lui Birkhoff trebuie să accentuez că acestea aveau în ele originalitatea asupra cărora esteticienii de mai tîrziu au atras atenţia şi chiar le-au dezvoltat într-un mod surprinzător.

— În loc de „esteticienii de mai tîrziu" eu aş fi spus „estetica de azi". Asta fiindcă aşa şi-a intitulat Marcel Petrişor primul capitol din *Curente estetice contemporane* [54].

— Cu alte cuvinte, vrei să-mi spui că i-ai recitit cartea ?

— Da, aseară, am terminat-o. Şi am recitit-o cu aceeaşi plăcere şi interes ca acum cîţiva ani.

— Te cred. Autorul este bine informat şi are talent. Îmi pare rău că subiectul acesta nu intră în cadrul discuţiei noastre.

— De ! Dacă ne-am potrivi, pîrîiaşul nostru s-ar transforma în băltoacă. Eu am recitit cartea ca să mă pregătesc. Te-ai lăudat, doar, că ai de gînd să-mi vorbeşti despre estetica informaţională !

— Desigur, ea este singura care are pretenţia că a reuşit să măsoare frumosul.

— Dacă zici tu aşa, eu sînt dispus să te ascult.

— Mulţumesc pentru încredere şi uite cele două cărţi care mă vor ajuta : una este *Artă şi matematică*, scrisă de Victor E. Maşek [55] şi cealaltă *Informatica mirabilis*, apărută nu de mult, de Radu Bagdasar [56]. Le voi folosi, concomitent sau alternativ, aşa ca să-ţi pot da „cele mai multe informaţii în cel mai scurt timp", ca să-l parafrazez pe înaintaşul nostru din secolul al XVIII-lea. Află că termenul „estetică informaţională" a fost creat şi folosit în 1957 de Max Bense, ca o prescurtare a expresiei „teoria informaţională a proceselor estetice" [55, p. 67]. De altfel, M. Bense, împreună cu A. A. Moles şi H. Frank sînt creatorii *esteticii informaţionale*, adică a acelui instrument de cercetare exactă care, bazîndu-se pe statistica matematică, pe teoria probabilităţilor, pe teoria informaţiei, pe cibernetică şi pe psihologia experimentală, a reuşit să distrugă *inefabilul* ce învăluia frumosul.

— Cum ar mai fi putut rămîne cînd cîntăreşte frumosul ca pe un kilogram de zahăr.

— Nu eşti departe de adevăr, numai că ar trebui să schimbăm unitatea de măsură.

— Bine, atunci schimb-o şi arată-mi cum se ajunge la ea ?

— Ca să se poată măsura frumosul a trebuit să se stabilească, mai întîi, *condiţiile concrete* pe care trebuie să le îndeplinească un obiect ca el să fie *operă de artă*, cu alte cuvinte să aibă şi o *realitate estetică* alături de cea fizică.

— E natural să fie aşa şi unele dintre aceste condiţii le cam ştiu : Fiind *obiecte realizate în mod conştient* de om, trebuie să poată fi descrise statistic, ca o mulţime de elemente materiale şi distincte, situate în spaţiu sau în timp. Apoi, trebuie să se ţină seama că *omul* este *emiţătorul* şi *re-*

ceptorul stărilor estetice și că procesul de *comunicare* se realizează prin *semne.*

— În acest ultim capitol, cuvîntul hotărîtor îi revine semioticii — teoria modernă a semnelor —, care stabilește caracterizarea operei de artă printr-o informație estetică *codificată.* Și, după cum a arătat Max Bense : „începutul istoriei cercetării aspectului comunicativ al artei l-a făcut *Hegel,* în a cărui estetică putem găsi veritabilii germeni pentru o *semiotică* estetică (teorie a semnelor), pentru o *semantică* estetică (teorie a semnificațiilor) și pentru o estetică *pragmatică* (teoria comunicației estetice)..." [55, p. 68].

— Bine. Acum mai departe. Aceste semne permit să se stabilească elementele de ordine care determină opera de artă, adică furnizează toate *informațiile* posibile asupra ei. La urmă aceste informații se *prelucrează* cu ajutorul principiilor pe care se bazează atît teoria matematică a informației, cît și cibernetica și astfel se ajunge la o *caracterizare cantitativă* a proceselor și invarianților estetici respectivi. Și nu-i numai atît : „Ca și în cazul științelor naturii, putem distinge și pentru estetica informațională (cel puțin programatic) un stadiu *descriptiv...* care extrage din opera de artă anumite mărimi de cunoaștere, de pildă mărimi medii, dispersiuni, valori informaționale, valori de surpriză, de redundanță etc. Această limitare la descriere prin mijloace controlabile (în special prin evitarea evaluărilor și interpretărilor) face posibile enunțurile exacte, inatacabile". „Singura obiecție posibilă ar fi — după H. Frank — aceea că asemenea enunțuri nu au importanță, nu au sens din punct de vedere estetic..."

În analogie cu progresele fizicii, H. Frank propune „...introducerea unui *model* al subiectului consumator de artă. Un asemenea model al esteticii informaționale va fi, în cea mai mare parte, reprezentat de psihologia informațională, teoretică, întregită prin ipoteze și considerații speciale asupra percepției și realizării estetice. Totuși, și o asemenea estetică informațională *exactă* rămîne în principiu atacabilă atîta vreme cît privim ca receptor intenționat al operei de artă, omul. Căci rămîne atunci de lămurit întrebarea, în ce măsură modelul este adecvat subiectului. De aceea, estetica informațională exactă tinde spre o aproximare a consumatorului printr-un șir de modele ale subiectului receptor." [55, p. 69—70]. Și, ca să-ți fac plăcere, privește schema rezumativă relativ la

etapele esteticii informaționale, care o avem aici la pagina 73, din cartea lui V. E. Mașek (fig. 121) :

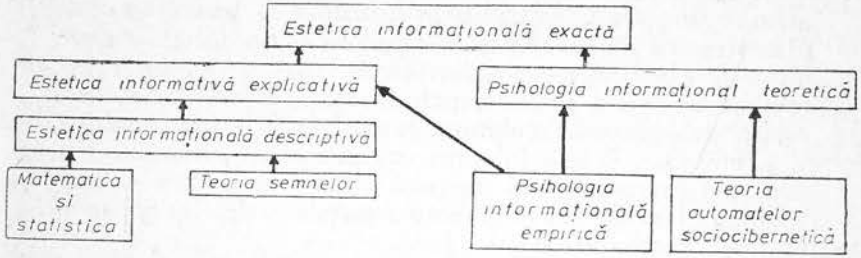


Fig. 121

—. Mă întreb, ce-ar spune Benedetto Croce dacă ar cunoaște toate realizările din domeniul esteticii informaționale împlinite în intervalul ultimilor treizeci de ani, de cînd el nu mai trăiește ? O jumătate de veac a cercetat cu pasiune și îndîrjire problema frumosului sub toate aspectele lui, a scris atîtea cărți care se citesc cu plăcere și acum, chiar dacă nu toți sînt de acord cu toate părerile lui, și a rămas convins că „frumosul nu are existență fizică". Oare ar mai susține și azi că frumosul nu se poate măsura ?

— Asta-i una la mînă, dar cred că a doua lovitură, aceea a creației artistice însăși, executată de calculator ar suporta-o și mai greu, cum se întîmplă, de altfel, cu destui artiști, critici de artă și alții care iubesc artele, care continuă să susțină și azi, odată cu Benedetto Croce, că : „Opera de artă trebuie să fie *nu numai un întreg unitar, dar și o creație* străbătută de curent liric *al unei personalități.*

— Ai dreptate. O primă și normală consecință a amestecului ordinatorului în domeniul esteticii a fost că i s-a încredințat lui și *executarea operelor de artă,* or, sînt încă destul de mulți acei care nu vor să accepte că frumosul se poate reduce la o formulă matematică și arta la o lucrare de laborator. Mi se pare că jocul nostru cere să considerăm mai îndeaproape și acest nou aspect al creației unei opere de artă ?

— Da. Problema însă cuprinde mai multe etape și, ca să le putem sesiza mai bine, voi începe cu cîteva observații pe care le-am extras din cele două cărți ce le-am ales drept

ghid : În ultimele trei decenii, dimensiunea estetică ocupă tot mai mult un loc important în existența și conștiința omului contemporan. Aceasta a făcut ca, în rezolvarea problemelor artistice de *grafică* sau de *design industrial* — fenomen exemplar al unirii utilitarului cu esteticul — să fie folosite calculatoarele electronice — ordinatoarele. Mai tîrziu, utilizarea ordinatoarelor s-a extins treptat în toate domeniile artelor : arhitectură, pictură, sculptură, muzică, poezie, artă dramatică, etc. Dar, despre folosirea calculatoarelor electronice în domeniul literaturii și al teatrului nici nu era nevoie să mai amintesc, fiindcă văd în biblioteca matale cartea lui Solomon Marcus : Poetica matematică [57].

— O carte scrisă cu multă măiestrie, păcat că nu o putem include în discuțiile noastre.

— Cred și eu ! Cum să amestecăm în jocul nostru, o carte de pură și strictă specialitate ? Revenind la observațiile care le-am făcut, trebuie să precizez că prin introducerea ordinatoarelor în procesele de creație artistică s-a ivit o nouă ramură a esteticii informaționale, numită de Max Bense *estetica generativă*, definită, tot de el, astfel : „Estetica generativă înseamnă circumscrierea tuturor operațiilor, regulilor și teoremelor prin a căror aplicare la o mulțime de elemente materiale funcționînd ca semne, se poate obține în mod conștient și metodic o stare estetică". [55, p. 181].

— Așadar, estetica generativă și-a asumat rolul de intermediar între artist și opera sa ? Artistul are numai ideea, alege semnele și alcătuiește programul ?

— Da. Iată cum rezumă Mașek acest proces : „estetica generativă este o teorie matematică-tehnologică a transformării unui *repertoriu* (de semne) în *directive*, a *directivelor* în *procedee* și a *procedeelor* în *realizări* concrete. *Procesul creator* în sensul esteticii generative deține, așadar, o fază conceptională și o *fază realizatorică*... Opera nu se mai află în raport nemijlocit cu creatorul ei, ci este mijlocită de intervenția unui sistem de agregate semiotice și mașinale... Întregul proces generativ decurge, în principiu, conform schemei următoare : program → (computer + generator de numere aleatoare) → realizator".

— Așa fiind, e clar că în această colaborare dintre om și calculator, omul este *proprietarul* operei sale. Mașina îi folosește doar ca un ajutor, desigur un ajutor extraordinar de

prețios pentru că ea poate stabili toate combinațiile pe care creierul omului nu le poate prevedea și dezvolta și nici nu poate efectua seriile uriașe de calcul sau de deduceri prin care se ajunge la realizarea operei, dar încă o dată țin să accentuez că *ideea, inspirația* este a omului, iar mașinii *îi revin* cele 99 procente de transpirație, de care vorbea, mi se pare Goethe, cînd a definit geniul.

— Iată o nouă schemă (fig. 122), întocmită de A. Moles,

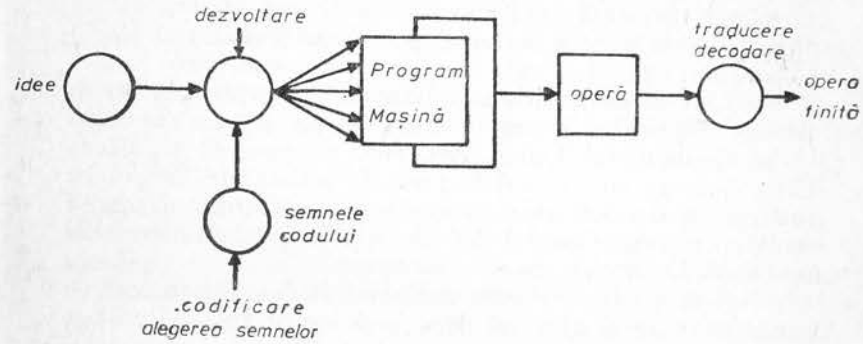


Fig. 122

care arată cum funcționează o „asemenea mașină, amplificatoare a inteligenței umane". [55, p. 192].

Pe lîngă această schemă, vreau să-ți mai citez și precizarea pe care o face R. Bagdasar în legătură cu *„esențializarea și hiperconceptualizarea creației :* Dacă în arta obișnuită artistul creează la un moment dat o singură operă, în arta de calculator el poate concepe prin intermediul unui singur algoritm un număr imens de opere. Partea fizică, mecanică a procesului de realizare revine calculatorului. De aici o serie de consecințe mutaționale. În primul rînd abilitățile manuale care, în unele dintre artele *tradiționale* sînt esențiale, devin pentru profesioniștii artei de calculator inutile. Sarcina de a picta sau de a sculpta efectiv îi revine mașinii electronice prin perifericele sale specializate... un alt aspect important este viteza de execuție materială ultrarapidă. Dar ceea ce are o importanță cu adevărat majoră, în acest proces, rezidă în faptul că elabo-

rarea unei opere, care rămîne un act eminamente intelectual, se condensează nemăsurat, se esențializează. Algoritmul este germenele matematic al unui întreg ansamblu de opere. Concepîndu-l, autorul său trebuie să dea dovada unei excepționale puteri imaginative pentru a-i putea urmări cît mai departe dezvoltările și implicațiile posibile în mulțimea operelor concrete rezultate. Ceea ce se pierde deci în privința dexterităților manuale, se cîștigă cu prisosință în cadrul fazei conceptuale. De altfel, unii dintre artiștii de calculator susțin că noul sistem de referință al domeniului, opera de artă constă în însuși programul elaborat și nu în concretizările lui efective".

— Cele ce mi-ai citit m-a făcut să mă gîndesc la Badea Cîrțan. Săptămîni întregi a mers el pe jos ca să poată vedea Columna lui Traian. Azi, după un veac un alt Badea Cîrțan ajunge cu avionul într-o oră în fața ei. Timpul de realizare a dorinței ca și a unei opere de artă s-a scurtat mult, numai sentimentul lor de sfială și admirație a rămas același.

— S-ar putea ca sentimentele lui Badea Cîrțan, cel de acum un veac și al celui de azi, să nu fi fost influențate de fantastica micșorare a intervalului de timp dintre dorință și realizarea ei, dar starea sufletească a artistului de calculator a fost puternic influențată de această viteză cu care-și vede opera lui realizată ! S-a schimbat într-atît, încît a ajuns să considere că *programarea* este opera lui de artă și nu *realizarea* ei efectivă. Și dacă mă gîndesc la mașinile care-și permit chiar anumite manifestări de independență față de programul inițial, atunci îmi pare că s-au rupt toate punțile între personalitatea artistului de acum un veac și aceea a actualului artist de calculator. În această privință, Radu Bagdasar consideră că : „este greu de imaginat un artist de calculator care, pe lîngă pregătirea sa estetică, să nu dispună și de o temeinică formație în domeniul exploatării calculatoarelor. Lucrurile se pot întîmpla și invers : un informatician se poate exersa în domeniul artei. Oricum, profesiunile de bază ale autorilor de artă de calculator sînt în mod șocant altele decît cele ale artiștilor *tradiționali*. Avem de-a face cu ingineri, compozitori, matematicieni, medici, pictori, filozofi, poeți, sculptori. O statistică pe profesiuni ar fi poate favorabilă celor cu pregătiri pozitive... Arta de calculator reprezintă în totalitatea sa un șir de experimente care nu s-ar putea realiza fără cunoașterea aprofundată a mecanismelor creației și a structurii matematice a artei". [56, p. 163—164]

— Ai făcut aluzie la mașinile care-și permit anumite manifestări de independență. N-ai vrea să ne oprim puțin asupra acestui subiect, fiindcă el se leagă, cel puțin așa cred, de o problemă care mă interesează, dar nu o cunosc decît din titlu. Este vorba de *moartea informațională*.

— În mai puține cuvinte decît mine are să te inițieze cartea scrisă de Mașek : „Este vorba de procedeele în care mașina contribuie, *pe cont propriu*, la sporirea tezaurului de bunuri estetice al omenirii, deci de realizarea acestor structuri estetice «libere», obținute pe baza unor procese stocastice, intuitive. Nu înseamnă că această categorie de mașini lucrează absolut independent, ci numai că, spre deosebire de cazurile anterioare, aici mașina este autorul *principal* al produsului final, esteticianul — respectiv programatorul — fiind răspunzător numai pentru algoritm, nu și pentru operele rezultate direct din el... Un prim exemplu ne este oferit de așa-zisa *artă permutațională*. Programatorul își alege «un cîmp de posibilități», acest cîmp este definit prin reguli restrictive și un algoritm îi oferă combinații din care mașina dezvoltă apoi metodic toate posibilitățile. Numărul acestor posibilități poate fi neobișnuit de mare... și numai mașina va putea să le descopere sistematic pe toate, în vreme ce omul ar putea trece... pe lîngă variantele cele mai atrăgătoare. Doar mașina este capabilă să finalizeze fiecare dintre milioanele de variante realizate, pentru a le păstra pe cele mai bune... În cazul «artei permutaționale» nu este vorba de realizarea unor structuri artistice cu totul noi, care să exprime un mesaj uman și un ideal estetic inedit, ci de niște variațiuni pe o temă dată. Aceasta înseamnă că adăugăm capacităților *cantitative* ale mașinii un substrat calitativ ce nu este produsul ei, că îi «împrumutăm» adică idealul estetic, experiența și personalitatea artistului, al cărui stil și modalitate de creație... stau la baza programului alcătuit. Astfel, mașina nu se mai exprimă pe sine. *Ea încetează să mai fie computerul... și devine un alter ego al artistului respectiv, o prelungire, peste limitele biologice și temporale, a impulsului său de*

creație. Operațiile ei de combinare și selecție nu se deosebesc, în esență, de operațiile concrete prin care artistul și-a transpus ideea în realitate numai că ele se desfășoară infinit mai repede". [56, p. 198—204] Mai departe, trecînd peste informațiile despre tot ce privește realizările din diferitele domenii artistice, am să mă opresc la cîteva considerații generale, care să stabilească legătura cu problema ce te interesează : „Folosirea computerelor pentru îmbogățirea universului estetic, a ambianței estetice a omului contemporan este, dar mai ales va fi în viitorul apropiat, o caracteristică a luptei omului pentru fericire și bunăstare. Avem nevoie de ambianța noastră de cît mai multă frumusețe, inclusiv sub aspect decorativ (de la operațiile cărților sau arabescurile covoarelor și tapiseriilor pînă la ornamentarea clădirilor) și producerea ei în cantități industriale, cu ajutorul computerului, va satisface poate acea «foame» asiduă de designeri ce fac tot mai greu față cerințelor unei producții în continuă creștere și diversificare... Așa-numita «artă permutațională», creație a computerului, va putea contribui în chip esențial la satisfacerea acestei nevoi cantitative de frumos și originalitate. Ea are o considerabilă importanță, aducînd societății diversitatea individuală în uniformitatea aceluiași algoritm". [55, p. 235—238]

— Dar, prin această producere în cantități industriale a operelor de artă de calculator și, totodată, prin nenumăratele reproduceri perfecte pe care le poate executa mașina după operele clasice, opera originală nu-și pierde din prețuire ?

— Problema aceasta a fost pusă și răspunsul este în favoarea copiei. Se consideră că copiile perfecte ale operelor originale, așa cum sînt astăzi executate de calculatoarele electronice, nu au numai rolul *de a face cunoscute acele creații originale* marelui public care nu poate vizita muzeele lumii unde se găsesc acestea și nici sălile de concerte etc., dar că ele contribuie la *prelungirea vieții* acestor opere originale, supuse oricum degradării. Ba, unii esteticieni au ajuns la concluzia că noțiunea de *autenticitate* tinde să-și modifice sensul, considerîndu-se *copiile* după tablouri, discurile picup etc. tot așa de *autentice* ca și *originalul*.

— Nu cumva această nestăvilită dezvoltare a artelor ar putea duce la o saturare care, la rîndul ei, să provoace „moartea informațională ?"

— Pesimiștii cred așa, optimiștii nu. „Problema crucială a artei moderne", scrie Mașek, „dar și a artei în general, este aceea dacă civilizația actuală, caracterizată printr-un sistem existențial riguros și dens structurat, mai oferă suficiente condiții de existență a artei, respectiv dacă aceasta se mai poate justifica socialmente, reușind să trezească un interes vital, emoțional sau intelectual, diferit de un simplu efect de apariție ? În perspectiva esteticii informaționale, civilizația, ca și problema dezvoltării artei în cadrul acestei civilizații, este o problemă a inovației. Tradusă în termeni tradiționali, ea ridică întrebarea dacă mai poate exista arta în mod creator sau doar în unul imitativ (ceea ce ar fi echivalent cu o atrofiere și în final cu o expiere a ei). Am văzut că realizarea informației estetice se bazează pe producerea unor structuri improbabile, imprevizibile, pe noutate și pe originalitate. Aici se ridică două probleme ; întîi, fiind vorba de realizarea unei soluții, a unei organizări imprevizibile a elementelor semnice, deci de procedee *combinatorii*, ar rezulta că, oricît de mare ar fi aria posibilităților, repertoriul elementelor fiind fatalmente limitat, numărul combinațiilor nu poate fi infinit, gama acestora epuizîndu-se cu timpul. Ajunși aici, firul raționamentului ne impune să ne gîndim că, pe măsura trecerii vremii, tabelul de incertitudini posibile, de configurații de semne inovatoare devine, prin repetare, atît de normal, încît ajunge să facă parte de drept din posibilități, din previziuni și, în mod tacit, ceea ce cîndva era informație devine simplă redundanță. O asemenea situație, de neocolit în perspectiva scurgerii timpului, îngustează din ce în ce mai mult spațiul de manifestare al întîmplătorului, pînă cînd se ajunge la o situație în care toate posibilitățile artistului de alegere liberă a unei combinații de semne estetice sînt epuizate. Vom fi siliți atunci — prezice Bense — să semnăm actul de deces al artei, întrucît entropia ei, reducîndu-se treptat pînă la zero, totul s-a transformat în ordine și reguli, producîndu-se o „înghețare" a mijloacelor ei de expresie și de comunicare, ceea ce are ca urmare o „moarte informațională" a artei". [55, p. 240]

— În *moartea informațională* văd o pedeapsă asemenea aceleia pe care a suferit-o Prometeu pentru că a răpit focul de pe Olimp și l-a dăruit oamenilor. Omul, la rîndul lui, a fost pedepsit pentru că a desprins frumosul de inefabil și l-a dăruit calculatorului.

— Bine, dacă ai făcut această comparație, atunci să o ducem pînă la capăt, fiindcă o viață nouă a început pentru om și de atunci de cînd a învățat să folosească focul, ca și acum de cînd poate crea arta, folosind computerul. Așadar, după cum Prometeu a fost izbăvit de pedeapsă de către Heracle, care a sfărîmat stînca și i-a descătușat lanțurile, se va găsi un alt om, la fel de puternic ca și Heracle, care să înlăture „moartea informațională !"

— De acord. De aceea, hai să încheiem discuția noastră, recitînd împreună, acele rînduri care ne sînt așa de dragi, ale matematicianului C. H. Hardy, despre care C. P. Snow spunea că avea darul de a „transforma orice muncă intelectuală, majoră sau minoră, sau orice simplu joc al minții, într-o operă de artă". [58, p. 10]

— Poftim cartea, gata deschisă la pagina 87, te ascult :

— „Matematicianul, ca și pictorul sau poetul, este un creator de modele. Dacă modele lui sînt mai durabile decît ale celorlalți, este din cauză că sînt construite *din idei*. Pictorul creează modelele din forme și culori... Matematicianul însă n-are alt material cu care să lucreze decît ideile. De aceea, modelele lui au șansă să dureze mai mult, fiindcă ideile se uzează cu timpul mai puțin decît vorbele. Modelele matematicianului, ca și ale pictorului sau poetului, trebuie să fie frumoase. Ideile, ca și culorile și vorbele trebuie să se asambleze între ele în mod armonios. Frumusețea este primul test : în lume nu există loc durabil pentru matematică urîtă... Ar fi greu să găsim în prezent un om cult care să fie cu totul insensibil la seducția estetică a matematicii. Desigur că este extrem de dificil *să definim* frumosul în matematică, dar lucrul acesta este tot așa de adevărat pentru orice fel de frumos". [58]

Iași, 5. III. 1983

NOTE

1. H. Suter : *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise*, von Abu-l-Raihan Muh-el-Biruni. Biblioteca Mathematica, vol. 11_3, 1910, 11, p. 11.
2. Abu Raihan Muhamed ibn Ahmed al Biruni, cunoscut sub numele prescurtat de *al-Biruni* (973—1048) s-a născut în orașul Kiat, capitala Horezmului, în R. S. S. Uzbekistan. A avut ca profesor pe Abu Nasr ibn Irak, care a dat prima demonstrație a teoremei sinusului din triunghiul plan. A lucrat împreună cu Abu Nasr la Academia din Kiat pînă în 1017, cînd Horezmul a fost cucerit de sultanul Mahmud din Gazna. Atunci al-Biruni s-a mutat în noul centru cultural al Islamului, Gazna. A făcut o călătorie în India, acolo a studiat limba sanscrită și după aceea a scris *Cronica Indiei*, carte în care se face o descriere a geografiei și credințelor religioase și astronomice ale țării și se insistă asupra cunoștințelor matematice ale hindușilor, traducînd în cele mai mici amănunte atît principiul pozițional de numerație, inventat de ei, cît și teoremele de geometrie și trigonometrie. Pe lîngă această carte, al-Biruni a mai scris alte numeroase lucrări din diferitele domenii ale fizicii, medicinii, farmaciei, astrologiei și, bineînțeles, al matematicii. Astfel, în 1030 : *Canonul lui Masud despre astronomie și stele*, dedicat sultanului Masud al Gazei, fiul lui Mahmud, are o deosebită importanță pentru istoria trigonometriei și a astronomiei.
3. H. Poincaré : *Science et Methode*. Ed. Flammarion, Paris, 1927, p. 57—59.
4. Dumitru Matei : *Originile artei*. Editura Meridiane, București, p. 106
5. *Dicționar de filosofie*. Editura politică, București, 1978, p. 295.
6. Platon, *Opere*, vol. II. Editura științifică și enciclopedică, București, 1976, p. 71.
7. Oscar Becker : *Fundamentele matematicii*. Editura științifică, București, 1968, p. 153.

8. Jan Bialostocki : *O istorie a teoriilor despre artă.* Editura Meridiane, Bucureşti, 1977, p. 92.
9. Tudor Vianu : *Estetica,* Editura pentru literatură, Bucureşti, 1968.
10. Ştefan Odobleja : *Psihologia consonantistă.* Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1982.
11. Mihai Ralea : *Prelegeri de estetică.* Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
12. Benedetto Croce : *Estetica.* Editura Univers, Bucureşti, 1971.
13. Mihai D. Ralea : *Comentarii şi Sugestii.* Editura Casei Şcoalelor, Bucureşti, 1928.
14. Jean-Paul Collette : *Histoire des mathématiques,* Diffusion Vuibert, Paris, 1973, p. 22.
15. Matila C. Ghyka : *Le nombre d'or.* Gallimard, Paris, 1931.
16. După cum observă Victor Marian în *Notele* din Cartea a XIII-a, vol. III. *Elemente Euclid,* p. 156 : „Propoziţiile 1—6 au ca obiect secţiunea de aur a unui segment de dreaptă... primele cinci propoziţii sînt o întregire la propoziţia II : 11. E probabil că ele provin de la Eudoxus, deoarece Proclus (412—485) afirmă că acesta ar fi aflat cîteva teoreme referitoare la secţiunea de aur.
17. Matila Ghyka : *Estetica şi teoria artei.* Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1981.
18. Euclid : *Elemente,* vol. I. Traduse şi adnotate de Victor Marian. Biblioteca Gazeta Matematică, Bucureşti, 1939, p. 242.
19. Numărul Φ se exprimă şi printr-o fracţie continuă formată numai cu cifra 1 :

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Redusele succesive ale acestei fracţii, care sînt :

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}\,; \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,; \quad 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,; \text{ etc.,}$$

reprezintă raportul dintre doi termeni consecutivi din şirul Fibonacci. Folosind tot cifra 1, numărul de aur se mai poate scrie sub forma unui şir infinit de radicali suprapuşi. Anume, pornind de la relaţia (1) : $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ se deduce, folosînd-o în mod succesiv :

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}} = \dots$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

20. Dacă se impun anumite condiţii constantelor C_1 şi C_2 se obţine un anumit şir particular. De exemplu, se poate regăsi şirul iniţial, al lui Fibonacci, impunînd condiţiile ca $u_1 = 1$ şi $u_2 = 1$. În adevăr, înlocuind în expresia lui u_n (în care am făcut o dată $n = 1$ şi apoi $n = 2$) se obţine : $u_1 = 1 = C_1 + C_2$ şi $u_2 = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ sau $C_1 + C_2 = 1$ şi $C_1 - C_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, de unde :

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{şi} \quad C_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right).$$

Înlocuind aceste valori ale lui C_1 şi C_2 în expresia termenului general u_n se obţine :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Punînd $n = 3$, $n = 4$ avem :

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 2,$$

adică am regăsit şirul Fibonacci.

21. În această privinţă, celelalte popoare din Orientul antic au avut o intuiţie mai clară despre *noţiunea de număr* decît grecii, căci ele nu au făcut nici o deosebire între numerele întregi sau fracţionare. Din contra, grecii făceau o deosebire precisă între numere. Pentru ei numerele erau numai întregii naturali (fără zero), iar raportul dintre două numere întregi *nu era un număr fracţionar,* ci o *mărime* care putea fi *geometrică,* dacă exprima raportul dintre două mărimi geometrice (segmente, arii etc.) sau fizică, dacă se referea la o mărime fizică. Această concepţie de *mărime geometrică* sau *fizică* legată de numerele ce nu erau întregi a fost luată şi de matematicienii din apusul Europei şi a dăinuit pînă în secolul al XVII-lea. De abia de atunci înainte apar în-

cercările de a se generaliza noţiunea de număr, desprinsă de orice însuşire geometrică sau fizică.

22. Este evident că aceste medii dintre a şi c nu au aceeaşi valoare numerică. Între ele există relaţia: $b_A > b_G > b_H$. Media geometrică a mai fost numită şi *proporţie continuă*, fiindcă numitorul primului raport *se continuă* ca numărător în cel de-al doilea. *Tăietura de aur* apare ca un caz particular al acestei proporţii, în care $a = b+c$. În acest caz avem, aşa cum s-a văzut:

$$\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c} \text{ adică: } 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c}. \text{ Notînd } \frac{b}{c} = \Phi$$

regăsim ecuaţia $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

23. Pietricelele care se adăugau unui pătrat ca să formeze pătratul următor purtau numele de *gnomon*. După cum se observă, aceste pietricele sînt dispuse în forma unui băţ îndoit, ⌐ şi, mai tîrziu termenul a fost adoptat de astronomi ca nume pentru parul înfipt în pămînt, care, prin umbra lui, indica ora.

24. Euclid: *Elemente*. vol. II, p. 46.

25. Despre *trisectoarele* unui unghi, fiecare din cele două drepte care împarte unghiul în trei părţi egale, se cunoaşte o frumoasă teoremă a lui Morley: „trisectoarele unghiurilor unui triunghi se taie în vîrfurile unui triunghi echilateral (fig. 123). *(Dicţionar de*

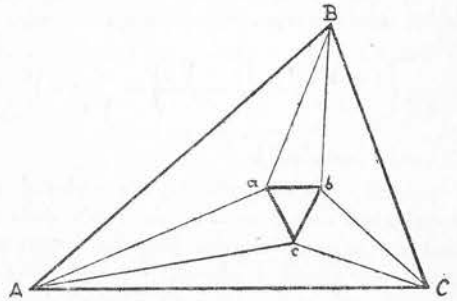


Fig. 123

matematici generale. Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974, p. 295).

26. *Elementele* lui Euclid au fost compuse iniţial din 13 Cărţi, atîtea cîte au fost scrise de Euclid. Ulterior s-au mai adăugat încă două şi anume: Cartea a XIV-a a fost scrisă prin secolul al

II-lea e.n. de Hipsicle din Alexandria; ea cuprinde relaţiile dintre ariile şi volumele poliedrelor regulate şi înscrierea lor în sferă. Cartea a XV-a a fost compusă de Damaschinus, care conducea, pe la 510, Şcoala din Atena. Se pare că teoremele cuprinse în ea nu au fost stabilite chiar de el, ci ar fi lecţiile pe care le-a predat învăţătorul lui, Isidor din Milet, unul dintre arhitecţii care au construit biserica Sf. Sofia din Constantinopol.

27. Pitagoreicii priveau tetraedrul ca pe un simbol sacru, deoarece şi el, ca şi tetractisul, conţinea patru elemente, aidoma substanţei cosmice, de aceea şi tetraedrul apărea într-o formulă de jurămînt ca, de pildă, următorul: „Jur pe acela care a dat sufletelor noastre tetraedrul, izvorul naturii eterne".

28. Termenul *perspectivă* a fost folosit întîi de Vitruviu şi apoi de toţi pictorii din Evul mediu. El este de origine latină: *perspicere* — a vedea prin, sau: a vedea lămurit. Termenul grec: *optica* are acelaşi înţeles.

29. Perspectiva modernă apare la sfîrşitul secolului al XIV-lea, la Florenţa şi ea este diferită de perspectiva geometrică derivată din *Optica* lui Euclid.

30. Denis Diderot: *Opere alese*, vol. II. Editura de stat pentru literatură şi artă, Bucureşti, 1957.

31. Noël Mouloud: *Pictură şi spaţiu*. Editura Meridiane, Bucureşti, 1978, p. 68.

32. Werner Hofmann: *Fundamentele artei moderne*, vol. 1 şi 2, Editura Meridiane, Bucureşti, 1977, vol. 2, p. 37.

33. Jean Grenier: *Eseuri asupra picturii contemporane*. Editura Meridiane, Bucureşti, 1972, p. 33.

34. Victor Ieronim Stoichiţa: *Mondrian*. Editura Meridiane, Bucureşti, 1979, p. 85.

35. Într-o scrisoare, B. Franklin spunea despre un pătrat magic de 16^2 numere pe care l-a construit el: „Nu mă laud, dar veţi fi gata să admiteţi că pătratul de ordinul 16 este cel mai magic dintre toate pătratele magice care au fost construite vreodată de vreun magician". (Fl. Cajori: *A History of Mathematics*. New York, 1980, p. 170).

36. *Mathematics. An Introduction to its Spirit and Use*. Ed. W. H. Freemann, San Francisco, 1978, p. 73.

37. W. Rousse Ball: *Récréations mathématiques*, II-e Partie. Paris, Hermann, 1926.

38. W. Ahrens: *Mathematische Unterhaltumgen une Spiele*. Leipzig, 1910, Bd. I und II, Bd. I, p. 380.

39. Eugène Véron : *L'Esthétique*. Ed. Alfred Costes, Paris, 1921.
40. Pécaut et C. Baude : *L'art*. Ed. Larousse, Paris, 1929, p. 78.
41. J. Philippe Minguet : *Estetica rococoului*. Editura Meridiane, Bucureşti, 1973.
42. Marcel Melicson : *Arhitectura modernă*. Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1975.
43. Johan Huizinga : *Homo ludens*. Editura Univers, Bucureşti, 1977.
44. Martin Gardner : *Alte amuzamente matematice*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1970, p. 31.

45. Teorema se demonstrează uşor. Fie o reţea închisă cu un anumit număr de noduri, adică astfel ca niciunul dintre arcele (cărările) ce pornesc din aceste noduri şi străbat reţeaua să nu aibă o extremitate liberă (fig. 124). Dacă x este numărul nodurilor de or-

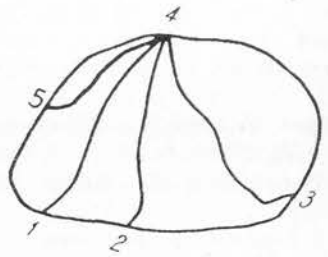


Fig. 124

dinul 3, y acela al nodurilor de ordinul 4 etc., atunci $3x$ este numărul cărărilor legate de aceste noduri şi la fel $4y$, $5z$, numărul cărărilor de ordinul patru, cinci etc. Numind n numărul cărărilor ce străbat întreaga reţea şi ţinînd seama de faptul că fiecare trebuie străbătută în două sensuri, astfel ca pornind de la un loc să se ajungă la acelaşi loc, avem relaţia $3x + 4y + 5z + \ldots = 2n$. Dar $2n$ fiind un număr par, lăsînd la o parte din membrul întîi toate numerele pare, rezultă că numărul nodurilor impare trebuie să fie par. Teorema a doua este o consecinţă firească a acestei teoreme. Însă, să reţinem că din teoremă nu rezultă şi faptul că reţeaua poate fi străbătută printr-o trăsătură continuă.

46. W. Rouse Ball : *Récréations mathématiques*, vol. II, Ed. Herman, Paris, 1926, p. 205.

47. Dr. W. Ahrens : *Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik*, Berlin, Springer, 1918, p. 73.
48. Tiberiu Roman : *Simetria*. Editura tehnică, Bucureşti, 1963, p. 11.
49. George D. Birkhoff, *Aesthetic measure*. Cambridge, Massachusetts, 1933.
50. H. S. M. Coxeter : Regular *polytopes*, London, 1948.
51. Herman Weyl : *Symmetry*. În : James R. Newman, *The World of mathematics*, New York, 1956, vol. I, p. 671.
52. Philippe le Corbeiller : *Crystals and the Future of Physics. In :* James B. Newmann, *The world of mathematics*, vol. II, New York, 1956, p. 871.
53. Joseph Schillinger : *The mathematical basis of the arts*. Philosophical Library, New York, 1948.
54. Marcel Petrişor : *Curente estetice contemporane*. Editura Univers, Bucureşti, 1972, p. 112.
55. Victor Ernest Maşek : *Artă şi matematică*. Editura politică, Bucureşti, 1972.
56. Radu Bagdasar : *Informatica mirabilis*. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1982.
57. Solomon Marcus : *Poetica matematică*. Editura Academiei R. S. România, Bucureşti, 1970.
58. G. H. Hardy : *Crezul meu? Matematica*. Editura Enciclopedică română, Bucureşti, 1970.

CUPRINS

În loc de prefață 5
Primii pași către frumosul în matematică 22
Acolo unde matematica s-a
înfrățit cu frumosul 46
Matematica și pictura 76
Pătratele magice 103
Matematica și arhitectura . . . 126
Hai să ne jucăm ! 144
Frumosul se măsoară ? 187
Note 201

ÎN EDITURA ALBATROS

au apărut

SOLOMON MARCUS

PARADOXUL

G. ENESCU

OMUL — SISTEM BIOFIZIC

MIHAIL D. NICU

O AVENTURĂ A ŞTIINŢELOR VIEŢII

ÎN EDITURA ALBATROS

au apărut

DAN BARBILIAN — ION BARBU

PAGINI INEDITE (vol. II)

C. DINESCU ● B. SĂVULESCU

INIŢIERE ÎN MATEMATICA APLICATĂ

CĂTĂLIN PETRU NICOLESCU

TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ